ЖАҢЫ КИТЕП

С. К. Кыдыралиев, А. Б. Урдалетова,
Г. М. Дайырбекова, Г. А. Лисовская

Методическое пособие

МАТЕМАТИКА

6 класс

Для учителей школ с русским языком обучения

Бишкек
2018

УДК 372.8
ББК 74.262
М 34

Эксперт: *к. пед. н., доцент Г. Ж. Карагозуева*

М 34 Математика. 6 кл.: Метод. пособие для учителей шк. с рус. яз. обучения / С. К. Кыдыралиев, А. Б. Урдалетова, Г. М. Дайырбекова, Г. А. Лисовская – Б.: Аркус, 2018. – 120 с.

ISBN 978−9967−31−846−5

В пособии даны методические рекомендации для учителей по материалам книги авторов Кыдыралиева С. К., Урдалетовой А. Б., Дайырбековой Г. М. «Математика. 6 класс».

Методическое пособие содержит некоторые комментарии авторов к учебнику; контрольные работы, которые можно включать в уроки разных типов, в том числе – в уроки самооценки. В целом пособие поможет значительно улучшить качество уроков, сделать их продуктивнее, интереснее.

М 4306010500−18 **УДК 372.8**
ББК 74.262

ISBN 978−9967−31−846−5

ВВЕДЕНИЕ

Уважаемые коллеги!

Вы приступаете к работе с учебником по математике для 6 класса. Этот учебник является продолжением нашего учебника для 5 класса. Мы убеждены, что основой для успешного обучения математике являются ситуационные задачи. Очень важно донести до учащихся мысль о том, что главная цель обучения математике – не овладение навыками счёта, а развитие мыслительных навыков. Конечно, считать тоже надо уметь, но даже самый гениальный вычислитель не будет считать быстрее, чем компьютер. В связи с этим наши уроки не должны превращаться в унылые занятия, на которых большая часть времени посвящается арифметическим операциям над большими числами. Конечно, можно делать вид, что калькуляторов не существует, но это не так.

Учебник состоит из 16 основных параграфов. Все они, за исключением первого, построены одинаково.

Первый параграф предназначен для того, чтобы настроить учащихся на плодотворную творческую работу. Задания этого параграфа направлены на развитие внимания, находчивости, логики. Построен он очень просто: есть список задач, которые предлагается решить школьникам.

Все остальные параграфы разбиты на пункты. Каждый пункт имеет двойной номер. Например, номер пункта 15.7 означает, что это седьмой пункт пятнадцатого параграфа. В каждом пункте обсуждается одна ситуация. Обычно она формулируется в виде задачи, которая приводится с подробным решением. Материал, разобранный в задаче, предлагается закрепить на подобных заданиях. Задания могут чуть-чуть отличаться от разобранной задачи. Поэтому, возможно, Вашим ученикам потребуется небольшая помощь при её решении. В связи с этим такую задачу желательно решать в классе. Следующее задание может отличаться от разобранной задачи только числами. Поэтому его можно безбоязненно задать на дом. Чтобы закрепить полученный навык, а также для того чтобы учащиеся научились выделять данную ситуацию, подобная задача предлагается как одна из итоговых в конце параграфа.

Учебник относится к новому поколению школьных учебников и построен несколько иначе, чем традиционные. Поэтому должна измениться и форма урока. Обычно после проверки домашнего задания учитель объясняет новую тему, а остаток урока посвящается закреплению материала. В нашей книге каждая новая тема разбита на несколько более мелких подтем. Для изучения подтемы выделен пункт. По нашему мнению, учитель должен начать изучение новой темы, разобрав соответствующую задачу у доски. Далее решается следующая задача. Нужно приучить учеников к тому, что решение задачи на классной доске – не для переписывания в тетрадь. Это только для сверки. При таком подходе следует ожидать, что несколько более сильных учеников решат эту задачу быстрее, чем это будет сделано на доске. Этих учеников нужно настроить на то, чтобы они начали самостоятельно разбирать задачу из следующего пункта. Время от времени таким ученикам нужно давать возможность объяснять одноклассникам новую задачу у доски. Возможно, это несколько замедлит скорость прохождения новых тем, но польза для учащихся от такого подхода перевешивает. Известно, что материал, усвоенный самостоятельно, запоминается гораздо лучше.

Это же соображение можно использовать при формулировке домашнего задания. На дом можно задать и один-два новых пункта. Конечно, правильность усвоения заданий этих пунктов необходимо проконтролировать на следующем уроке.

Заканчивается книга тремя параграфами, содержащими дополнительные материалы. Они не входят в обязательную программу, но, по нашему мнению, очень важны для того, чтобы пробудить в учащихся интерес к математике. Этот материал можно изучать как в течение учебного года, так и в конце. Его также можно использовать для занятий математических кружков, факультативов и т. п.

О школьной математике и методах её преподавания

Начнём с целей обучения математике в общеобразовательной школе. Цели обучения математике в общеобразовательной школе разными авторами в различных работах, посвящённых методике преподавания математики, с акцентами различной силы на разные пункты, коротко сводятся к следующему:

- формирование представлений о математике как части общечеловеческой культуры, понимание значимости математики для общественного процесса;
- формирование представлений о методах и идеях математики, о математике как форме описания и методе познания действительности;
- овладение конкретными математическими знаниями, необходимыми для применения в практической деятельности, для изучения смежных дисциплин, для продолжения образования;
- интеллектуальное развитие учащихся, формирование качеств мышления, характерных для математической деятельности и необходимых человеку для полноценной жизни в обществе.

Реализовать на практике эти цели достаточно сложно. Нет конкретных и точных методов и правил их реализации. Точнее, их очень много, но применение этих правил и получение реального результата зависит от очень многих факторов.

Мы назовём следующие факторы, которые иногда тесно связаны между собой:

- наличие учебника по математике, который соответствует по содержанию этим целям (такого универсального учебника нет и, скорее всего, создать такой учебник невозможно);
- наличие учителей, хорошо владеющих математическими знаниями и методикой преподавания предмета, с широкой общей эрудицией, хорошо знающих возрастную психологию учащихся (таких учителей немного и, если посмотреть на всё убывающее количество абитуриентов, желающих поступить на математические специальности педагогических вузов Кыргызстана, то их, скорее всего, в будущем больше не станет);
- уровень общей дошкольной подготовки детей;
- уровень образования родителей учащихся;
- экономическое положение семьи и психологическая обстановка в семье.

Этот далеко не полный список приводит к мысли о невозможности полной реализации целей обучения математике. Ведь многое не зависит непосредственно от учителей. Но каждый человек, ответственный за образование наших детей, должен стараться сделать свою работу максимально хорошо и с пользой для них.

Следует заметить, что цели математики являются динамическими. Они тесно связаны с развитием смежных с математикой наук, с развитием самой математической науки, с развитием потребностей, продиктованных жизнью, с развитием общества в целом. Из этого следует, что факторы, которые мы назвали, тоже должны быть в динамике, а значит, их содержание тоже должно изменяться в ногу со временем.

Написано и опубликовано много замечательных учебников, методических пособий, отдельных работ по методике преподавания различных тем по математике. Можно назвать замечательные пособия по решению олимпиадных задач, по решению нестандартных задач, по углублённому изучению математики, по кружковой работе по математике. Это очень богатый и очень нужный материал. Спасибо всем, кто эту работу делает. Но следует отметить, что это всё для тех учеников, кто имеет математические способности и дальнейшее своё образование и деятельность собирается выбирать в тесной связи с этой наукой. А как же те, кто имеет другие замечательные склонности, не одарён математическим мышлением, не учится в математическом классе, не посещает математический кружок, те, кому математика кажется сложной, непосильной и неинтересной наукой? Ведь их среди детей подавляющее большинство. А математика, как известно, помогает раскрыть сущность других наук, является мощным средством познания, да и в обычной практической жизни без неё не обойтись.

Следует отметить, что если ребёнку кажется, что он не имеет математического мышления и способностей к математике сейчас, то это вовсе не означает, что у него не появится интерес и вкус к занятиям математикой в процессе изучения этого предмета, что он не способен научиться математически мыслить. Поэтому нам кажется, что часть материала и форма его изложения в учебнике математики для общеобразовательной школы и методика обучения предмету должны иметь вектор, направленный на таких учеников, хотя бы потому, что их большинство.

Основной материал в нашем учебнике ориентирован на такое большинство, хотя в нём имеются и исследовательские задачи, и задачи, которые среднему ученику решить с ходу сложно. Эти задачи обычно расположены ближе к концу каждого параграфа. Обычно в школе темы и задачи по теме рассматриваются каждая в отдельном разделе. Происходит натаскивание на усвоение именно этого программного материала по чисто математическим задачам именно по данной теме. От этого среднему ученику кажется, что математика – это сплошные вычисления по формулам и в жизни она ему вряд ли понадобится. Отсюда и потеря интереса к ней. А сильному в математике ученику становится скучно решать задачи одним и тем же методом (он быстро усвоил эту тему и задачи уже с лёгкостью решил). В результате и у сильного и склонного к математике ученика пропадает интерес к этой нудной, как ему кажется, науке.

Особенностью нашего учебника является то, что одна и та же тема рассматривается несколько раз в разных ракурсах, в связи с другой темой, в связи с потребностями другой задачи, чаще текстовой, взятой из практической жизни. В задачах используются имена известных детям литературных или мультяшных, а иногда и реальных героев. Так мы пытаемся научить детей тому, что решение практической задачи часто требует синтеза знаний разного материала.

При решении задач иногда рекомендуется показать два способа решения и сравнить эти способы по оптимальности. Это позволит детям научиться находить оптимальные пути решения задачи в зависимости от цели её решения. Иногда второй способ решения даёт возможность проверки правильности ответа. Подталкивание учащегося к нахождению другого способа решения задачи развивает его творческое мышление. Научиться творчески мыслить – полезно для любого человека.

При рассмотрении одной и той же темы на разных уровнях изучения предмета полезно вернуться к задаче, ранее уже решённой, и попробовать решить её снова. Ученикам полезно убедиться, что новые знания упростили процесс решения задачи. Это мотивирует учащихся к приобретению новых знаний.

Рекомендуется иногда составлять вместе с учащимися текстовые задачи, похожие на уже решённые, используя при этом факты из окружающей их жизни. Это поможет ученикам научиться мыслить практически. Они научатся формулировать практическую задачу на языке математики, на языке математических выражений, в виде математической модели практической ситуации, что часто непросто. Но на уроке у ученика есть помощник – учитель.

Бывает очень полезно потренировать учащихся, предлагая им решить обратные задачи, а именно: научить их проинтерпретировать записанное математическое выражение на практическом языке, словесно. Это даст им возможность понять практический смысл решения задачи, записанной в виде математического выражения, увидеть соответствие между математической моделью и практической задачей.

Начиная новую тему и формулируя некий математический закон в виде формулы или свойства, рекомендуется начать мыслить вместе с учениками индуктивным методом, методом наблюдений, используя наглядные примеры или закономерности из окружающей, знакомой учащимся жизни. Это поможет им понять, что математика нужна для потребностей практики и что её развитие связано с потребностями практики. Полезно подчеркнуть, где это возможно, что сама история развития науки математики это подтверждает.

При решении задач, в которых упомянуты известные имена или факты, вы можете прокомментировать их для ребят – это сделает урок интереснее. Можно дать задание ученикам подготовить небольшой устный или письменный короткий рассказ о них. Математика может и должна стимулировать учащихся к расширению кругозора: к изучению фактов истории, литературы, искусства, спорта…

Мы постарались сделать так, чтобы книгой было удобно пользоваться и во время занятий в классе, и при самостоятельном изучении.

Далее мы приводим довольно подробный разбор задач на повторение и некоторые дополнительные комментарии к материалам последующих параграфов.

Свои мысли, пожелания по улучшению учебника и методического пособия, указания на недостатки и опечатки можете присылать по электронному адресу: syrgakkyd@mail.ru

КОММЕНТАРИИ К МАТЕРИАЛАМ ПАРАГРАФОВ

§ 1. Задачи на повторение

Этот параграф является одним из ключевых. Шестиклассники должны в очередной раз убедиться в том, что в математике самым важным является умение логически рассуждать, правильно мыслить. При этом знание техники вычислений не является самым главным среди математических компетенций. Мы продолжаем пытаться подружить учащихся с математикой.

Не торопитесь рассказать правильное решение предлагаемых задач. Также не стоит пытаться убыстрять процесс «прохождения» задач, часто вызывая к доске самых сильных учащихся. Желательно, чтобы как можно большее количество Ваших учащихся «дошло» до правильного решения самостоятельно. Возможно также изучение материала этого параграфа вразбивку: вначале рассмотрите несколько первых задач, затем перейдите к материалу последующих параграфов, а оставшиеся задачи в нужном вам объёме задавайте на дом, разбирая их решение в начале или в конце уроков.

Постарайтесь добиться того, чтобы Ваши ученики не только указывали правильный ответ. Важно, чтобы, отвечая на вопросы, учащиеся объясняли, почему они выбрали такой ответ. Ведь и в повседневной жизни очень часто бывает важно не только принять правильные решения, но и суметь объяснить окружающим, почему принято это, а не другое решение.

Учитывая важность материала этого параграфа, мы посчитали разумным дать развёрнутые указания к решениям задач.

Указания к решению задач из § 1

I. На каждый вопрос в 12 последующих задачах дайте один из ответов: ДА, НЕТ или НЕ ЗНАЮ.

1. В одном дюйме 2,54 *см*. Верно ли, что 100 *см*² меньше, чем 16 квадратных дюймов?

Самый простой вариант решения: узнать сколько квадратных сантиметров имеется в одном квадратном дюйме: $2{,}54 \cdot 2{,}54 = 6{,}4516$. Далее нужно вычислить, сколько квадратных сантиметров имеется в 16 квадратных дюймах: $6{,}4516 \cdot 16 = 103{,}2256$ *см*². Итак, правильный ответ – ДА.

2. Верны ли утверждения?

1) В одном дециметре 100 миллиметров.

Приставка деци- указывает на десятую часть – в данном случае указание на десятую часть метра. Приставка милли- указывает на тысячную часть – в данном случае указание на тысячную часть метра. Следовательно, 100 миллиметров – это 100 · 0,001 = 0,1 *м*. Правильный ответ – ДА.

2) Грамм в 10000 раз меньше центнера.

В одном центнере 100 *кг*. Приставка кило- указывает на то, что базовую единицу измерения, в данном случае грамм, нужно умножить на тысячу.

Поэтому в одном центнере 100 · 1 *кг* = 100 · 1000 *г* = 100 000 *г*. Итак, правильный ответ – НЕТ.

Кстати, в 5 классе мы обсуждали запись чисел с помощью выражения вида 10^n. Удобство подобного рода записи чисел можно наглядно продемонстрировать на этом примере.

Итак, условие задачи можно записать так: *Верно ли утверждение, что грамм в 10^4 раз меньше центнера?*

Решение начнём с указания: 1 центнер равен 10^2 *кг*, 1 *кг* = 10^3 *г*. Поэтому в одном центнере $10^2 \cdot 10^3$ *г* = 10^5 *г*.

Одновременно с нахождением ответа на вопрос можно ещё раз продемонстрировать правило: **При умножении степенных выражений с одинаковым основанием их показатели степени складываются.**

3) В половине суток 720 минут.

В половине суток 12 часов, в каждом часе 60 минут. Поэтому в половине суток 12 · 60 = 720 минут.

3. Вася и Аида занимаются арифметикой. Вася собирается сложить 1,236 и 5,414, а затем округлить сумму до десятых. Аида, в свою очередь, собирается сначала округлить числа до десятых, а затем сложить. Верно ли утверждение?

1) Сумма исходных чисел 6,64. Так как 1,236 + 5,414 = 6,65, ответ – НЕТ.

2) Вася и Аида получат одинаковый результат.

У Васи после сложения и округления получится 6,7. У Аиды после округления получатся числа 1,2 и 5,4, а после сложения: 1,2 + 5,4 = 6,6, следовательно, ответ – НЕТ.

4. Айсулу за 3 порции мороженого по 15 сомов и литр кефира по 32 сома 50 тыйынов подала продавцу 100 сомов. Верно ли утверждение?

1) Стоимость покупки 77 сомов 50 тыйынов.

Числа 32 сома 50 тыйынов и 77 сомов 50 тыйынов в сомах записываются: 32,5 сома и 77,5 сома. Поэтому, так как $3 \cdot 15 + 32,5 = 77,5$, ответ – ДА.

2) Она получит сдачу 23 сома 50 тыйынов.

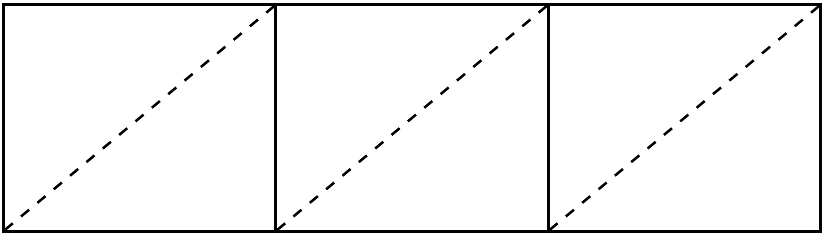
Число 23 сома 50 тыйынов в сомах записывается: 23,5 сома. Поэтому, так как $100 - 77,5 = 22,5$, ответ – НЕТ.

5. Верны ли утверждения?

1) Любой прямоугольник можно разрезать на 6 одинаковых прямоугольных треугольников.

ДА, потому что любой прямоугольник можно разделить на три равных прямоугольника.

Затем каждый из этих трёх прямоугольников нужно разрезать по диагонали.



2) Наибольшая возможная площадь прямоугольника с периметром 24 *см* равна 35 *см*².

В 5 классе было сказано, что из всех прямоугольников с заданным периметром наибольшей площадью обладает квадрат. Поэтому, так как сторона квадрата с периметром 24 *см* равна $24 : 4 = 6$ *см*, наибольшая возможная площадь: $6 \cdot 6 = 36$ *см*². Ответ – НЕТ.

6. Квадрат со стороной 1 *м* разрезали на квадратики со стороной 1 *дм*, которые склеили в ленту. Верны ли утверждения?

1) Длина ленты 100 *дм*.

Дециметр – это десятая часть метра. Поэтому в одном квадратном метре: $10 \cdot 10 = 100$ *дм*². Поэтому после разрезания получится 100 квадратиков со стороной 1 *дм*. Ответ – ДА.

Возможно, в Вашем классе есть очень педантичный ученик, который скажет, что для склеивании части квадратиков нужно накладывать их друг на друга. Тогда длина полученной ленты будет меньше. Думаем, с таким утверждением можно согласиться и предложить классу изменить текст задания так, чтобы снять это возражение.

Например, текст может звучать следующим образом: *Квадрат со стороной 1 м разрезали на квадратики со стороной 1 дм, которые нужно наклеить на ленту шириной 1 дм без разрывов и наложений. Верно ли утверждение, что понадобится лента длиной не менее 100 дм?*

2) Площадь квадратика 10 *см²*.

Дециметр – это десять сантиметров. Поэтому в одном квадратном дециметре: 10 · 10 = 100 *см²*. Ответ – НЕТ.

7. Верны ли утверждения?

1) У куба 6 граней.

2) У куба 6 вершин.

3) У куба 16 рёбер.

Нам кажется, что самый лучший способ ответить на эти вопросы – это взять в руки куб и подсчитать количество соответствующих элементов куба. Кстати, будет очень полезно спросить у учащихся, изменятся ли ответы, если слово *куб* заменить на *параллелепипед*.

8. Скорость моторной лодки по течению реки 35 *км/час*, против течения реки – 25 *км/час*. Верны ли утверждения?

1) Скорость течения реки 10 *км/час*.

Скорость лодки по течению реки есть сумма собственной скорости моторной лодки и скорости течения реки, а против течения реки – их разность. Поэтому если бы скорость течения реки была равна 10 *км/час*, то из скорости моторной лодки по течению 35 *км/час* следует, что собственная скорость моторной лодки: 35 − 10 = 25 *км/час*, а против течения: 25 − 10 = 15 *км/час*. Итак, ответ – НЕТ.

2) Собственная скорость моторной лодки 30 *км/час*.

Из сказанного выше следует, что собственная скорость моторной лодки лежит ровно посередине между скоростями по течению и против течения. Поэтому ответ 30 *км/час* – правильный.

9. В магазине имеется 3 вида тетрадей и 4 вида обложек. Верно ли утверждение?

1) Количество видов тетрадей составляет 75% от видов обложек.

Ответ ДА, потому что 1% от числа 4 равен 4 : 100 = 0,04, а 75% равны 0,04 · 75 = 3.

2) Набор «тетрадь + обложка» можно выбрать 7 способами. Каждую тетрадь можно обернуть в одну из четырёх обложек. Поэтому имеется всего 12 разных наборов «тетрадь + обложка». Ответ – НЕТ.

Для того чтобы решение было понятно всем, можно просто перечислить все возможные варианты. Итак, пусть есть три тетради: А, Б, В и четыре обложки: к, л, м, н. Тогда возможны варианты:

Ак, Ал, Ам, Ан;

Бк, Бл, Бм, Бн;

Вк, Вл, Вм, Вн.

10. В корзине лежат яблоки, груши и персики, всего 33 фрукта. Груш в 2 раза меньше, чем персиков, а яблок на 3 меньше, чем груш и персиков вместе. Верно ли утверждение?

1) В корзине 6 груш.

Если груш 6, то персиков 12, а яблок (6 + 12) − 3 = 15.

Всего, как должно быть: 6 + 12 + 15 = 33 фрукта.

2) Яблок в корзине в два с половиной раза больше, чем персиков.

Мы знаем, что числа, полученные в пункте 1), правильные. Разделим 15 : 12 = 1,25 и видим, что ответ – НЕТ.

11. Автотурист отправился в путешествие на четырёхколёсном автомобиле с одним запасным колесом. По дороге он менял колёса с таким расчётом, чтобы каждое колесо проехало одно и то же расстояние. Верны ли утверждения?

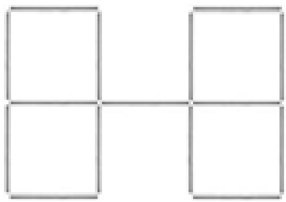
1) Если автомобиль проехал 8000 *км*, то каждое колесо проехало 6000 *км*.

Так как автомобиль проехал 8000 *км*, его колёса проехали 8000 · 4 = 32000 *км*, а каждое колесо проехало 32000 : 5 = 6400 *км*.

2) Если каждое из колёс проехало 8000 *км*, то автомобиль проехал 10 000 *км*.

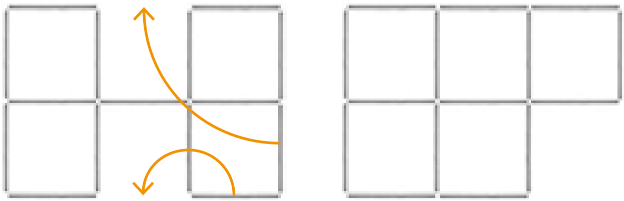
Колёса проехали 8000 · 5 = 40 000 *км*, а автомобиль проехал 40 000 : 4 = 10 000 *км*.

12. Пятнадцать палочек одинаковой длины сложены, как показано на рисунке.



Можно ли переложить две палочки так, чтобы получилось пять равных квадратов?

ДА, таким образом:



II. В каждом последующем задании из предложенных ответов выберите правильный.

13. В каком из следующих выражений при замене цифры 7 на любую другую цифру результат не изменится?

1) $7 + 7 \cdot 7 - 7$; 3) $(7 + 7) : 7 - 7$; 5) $7 + 7 + 7 - 7$.
2) $7 - (7 : 7 - 7)$; 4) $7 + (7 : 7 - 7)$;

Упростив выражения, получим:

1) $7 \cdot 7$; 3) $2 - 7$; 5) $7 + 7$.
2) $7 + 7 - 1$; 4) $7 : 7$;

Становится понятно, что при замене цифры 7 на любую другую цифру результат не изменится в пункте 4.

14. Часы лежат на столе циферблатом вверх. Минутная стрелка сейчас указывает на юго-запад. Через сколько минут она будет указывать на юго-восток?

1) 30; 2) 45; 3) 15; 4) 20; 5) 10.

Так же, как и в задаче 7, лучший способ ответить на этот вопрос – это взять часы, положить на стол и посмотреть.

15. Сумма цифр восьмизначного числа равна 7. Чему равно произведение цифр этого числа?

1) 0; 2) 4; 3) 7; 4) 8; 5) Невозможно определить.

Так как число восьмизначное, хотя бы одна цифра должна быть равна нулю. Следовательно, произведение равно нулю.

16. В семье пятеро мужчин: Иван Сидорович, Сидор Иванович, Сидор Петрович, Пётр Сидорович и Пётр Петрович. Один из них сейчас смотрит в окно, его отец спит, брат читает книгу, а сыновья ушли гулять. Как зовут того, кто смотрит в окно?

1) Иван Сидорович; 2) Сидор Иванович; 3) Сидор Петрович; 4) Пётр Сидорович; 5) Пётр Петрович.

Внимательно прочитав условие, понимаем, что в семье дедушка, два его сына и два внука – сыновья одного из них. У братьев отчества одинаковы. Следовательно, дедушка – Сидор Иванович. Соответственно, его сыновья – Иван Сидорович и Пётр Сидорович. Тогда внуки – Сидор Петрович и Пётр Петрович. Они – дети Петра Сидоровича, который смотрит в окно.

17. Старинная задача. Родник в 24 *мин* даёт бочку воды. Сколько бочек воды даёт родник в сутки?

1) 140; 2) 28; 3) 72; 4) 60; 5) 50.

В сутках 24 часа и, соответственно, $24 \cdot 60$ минут. Не нужно торопиться умножать! Разделив произведение на 24, узнаём количество бочек: $(24 \cdot 60) : 24 = 60$ бочек.

18. Значки на рисунке обозначают числа (одинаковыми значками обозначены одинаковые числа). Какое число обозначает сердечко?

▲ + ◊ = 5; ▲ − ◊ = 5; ◊ + ▼ = 7; ▲ + ▼ = ♥

1) 8; 2) 21; 3) 12; 4) 5; 5) 6.

Если внимательно посмотреть, то из первых двух равенств видно, что ◊ = 0, а ▲ = 5. Тогда из третьего уравнения ▼ = 7, и, как следствие, из четвёртого ♥ = 12.

19. Сколько весит кирпич, если он весит столько же, сколько весят треть кирпича вместе с гирей весом 2 *кг*?

1) 5; 2) 4; 3) 3; 4) 4,5; 5) 6.

Несложно понять, что две трети кирпича весят 2 *кг*. Следовательно, кирпич весит 3 *кг*.

20. Дату 1 марта можно записать тремя последовательными нечётными числами, расположенными по возрастанию: 01.03.05. Сколько всего дат с таким свойством (включая названную) будет в нынешнем веке?

1) 5; 2) 6; 3) 7; 4) 14; 5) 16.

Ответ проще всего получить простым перечислением требуемых наборов: 01.03.05; 03.05.07; 05.07.09; 07.09.11; 09.11.13.

21. Федя выбрал два трёхзначных числа, у которых совпадают суммы цифр. От большего числа он отнял меньшее. Какую самую большую разность он может получить?

1) 899; 2) 810; 3) 801; 4) 792; 5) 783.

Понятно, что наибольшее трёхзначное число имеет в сотнях цифру 9. Наименьшее трёхзначное число имеет в сотнях цифру 1.

Итак, две цифры: 1 и 9. Использовав, в качестве третьей цифры 1, 2, ..., 9, получим разность 792. Например:

991 − 199 = 792;   951 − 159 = 792;   911 − 119 = 792.

Кажется, что это искомый результат. Но в данном случае особую роль играет цифра нуль: 910 − 109 = 801.

22. На столе лежит много карточек, на каждой из них написано одно из чисел: 4, 21 или 35. Какое самое маленькое количество карточек нужно взять, чтобы сумма всех чисел на них была равна 640?

1) 18;   2) 644;   3) 23;   4) 24;   5) 36.

Так как нужно взять самое маленькое количество карточек, желательно взять побольше карточек с числом 35. Самое большое возможное число таких карточек – четыре, так как 640 : 35 = 18,28... Но вариант с 18 карточками 35 не подходит, так как 35 · 18 = 630. К 18 карточкам 35 нельзя добавить карточку 21 – будет больше, чем 640, а из карточек с 4 нельзя получить число 10. (640 − 630 = 10)

Поэтому на следующем шаге пробуем 17 карточек с числом 35. Так как 35 · 17 = 595, а 640 − 595 = 45, нам нужно набрать 45, взяв наименьшее количество карточек с 21 и 4. Для этого попробуем взять побольше карточек с 21 – можно две: 21 · 2 = 42. Так как 45 − 42 = 3, этот вариант не подходит. А что, если взять одну карточку с 21? 45 − 21 = 24. Ура! Необходимую сумму получим, взяв 6 карточек с числом 4. Итак, получилось 17 + 1 + 6 = 24 карточки.

Но смущают шесть карточек с числом 4 – многовато.

Поэтому давайте попробуем вариант с 16 карточками с числом 35. Так как 35 · 16 = 560, а 640 − 560 = 80, теперь нужно набрать 80, взяв наименьшее количество карточек с 21 и 4. Несложно убедиться в том, что этот вариант хуже первого.

Пробуем следующий вариант: с 15 карточками с числом 35. Так как 35 · 15 = 525, а 640 − 525 = 115, нужно набрать 115 карточками с 21 и 4. Несложно убедиться в том, что и этот вариант хуже первого.

Следующий вариант: с 14 карточками с числом 35. Так как 35 · 14 = 490, а 640 − 490 = 150, нужно набрать 150 карточками с 21 и 4. И этот вариант хуже первого.

Может, пора остановится и сказать, что 24 – это ответ?

Давайте попробуем ещё. Вариант с 13 карточками с числом 35. Так как 35 · 13 = 455, а 640 − 455 = 185, нужно набрать 185 карточками с 21 и 4. Тоже не годится.

Вариант с 12 карточками с числом 35. Так как 35 · 12 = 420, а 640 − 420 = 220, нужно набрать 220 карточками с 21 и 4.

Дальше идти не стоит, потому что на 11 карточках с числом 35 будет 385, 640 − 385 = 255, а это число набирается не менее чем 13 карточками с числом 21.

Итак, правильный ответ – 24.

В этом случае 18 карточек с числом 35 не годятся, так как $35 \cdot 18 = 630$, а число $644 - 630 = 14$ карточками с 21 и 4 нельзя получить.

Пробуем 17 карточек с числом 35. Так как $35 \cdot 17 = 595$, а $644 - 595 = 49$, нужную сумму можно получить, использовав одну карточку с 21 и семь с 4. Итак, получилось 25 карточек. Но это не оптимальная ситуация, потому что взяв 16 карточек с числом 35, получим: $35 \cdot 16 = 560$, $644 - 560 = 84$. Число 84 можно получить, взяв 4 карточки с 21.

Итак, получилось, что число 644 можно набрать на 20 карточках.

23. Гепард пробегает 250 *м* за 15 *сек*. С какой скоростью он бежит?

1) 80 *км/час;* 2) 75 *км/час;* 3) 60 *км/час;* 4) 45 *км/час;* 5) 56 *км/час*.

В одном часе 3600 секунд. То есть 240 раз по 15 секунд ($3600 : 15 = 240$). Следовательно, если бы гепард мог бежать один час с такой скоростью, то он бы преодолел $250 \cdot 240 = 60\,000$ метров. Итак, скорость гепарда – 60 *км/ час*.

Возможно, стоит довести до школьников информацию о том, что гепард является быстрейшим животным на земле. При этом он способен развивать столь высокую скорость за очень короткий промежуток времени.

24. Если к сумме двух чисел прибавить их разность, то получится 1) половина их суммы; 2) одно из этих двух чисел; 3) их удвоенная разность; 4) половина одного из этих чисел; 5) одно из этих чисел, умноженное на 2.

Решение: $(x + y) + (x - y) = x + y + x - y = 2x$.

25. Дастан хотел умножить некоторое число на 201, но забыл про 0 и, умножив на 21, получил 693. А какой результат он должен был получить?

1) 6963; 2) 2903; 3) 1296; 4) 8823; 5) 6633.

Необходимо вернуться назад: $693 : 21 = 33$ и затем получить искомый результат: $33 \cdot 201 = 6633$.

26. Все числа, сумма цифр которых делится на 6, выписывают в порядке возрастания. Чему равна самая маленькая разность между соседними числами в этом ряду?

1) 2; 2) 3; 3) 4; 4) 5; 5) 6.

Начнём выписывать такие числа: 6; 15; 24; 33; 39; 42. УРА! Мы остановились и воскликнули «Ура!», потому что ответ найден.

Нужно вспомнить признак делимости на 3 и понять, что наименьшая возможная разность – это 3.

Предполагается, что в начале шестого класса учащиеся могут не знать признаков делимости. Ну что ж, тогда это одно из мест, где можно начать о них говорить. Или же можно отложить решение этой задачи до момента прохождения соответствующей темы, заинтриговав учащихся.

27. Число *a* в два раза больше, чем число *b*. На сколько процентов число *b* меньше, чем *a*?

1) 100; 2) 200; 3) 40; 4) 50; 5) 60.

Так как $a = 2b$, если $a = 100\%$, то $b = 50\%$.

28. Все четырёхзначные числа, которые можно получить, переставляя цифры числа 2012, выписывают в порядке возрастания. Чему равна разность между ближайшими соседями числа 2012 в этом ряду?

1) 780; 2) 801; 3) 640; 4) 282; 5) 842.

Интересующая нас часть ряда: ... 1220; 2012; 2021; ...

Поэтому $2021 - 1220 = 801$.

29. В пяти играх футбольный клуб «Пруха» забил 3 мяча и пропустил 4 мяча в свои ворота. Три игры клуб выиграл, одну сыграл вничью и одну проиграл. Какой был счёт в матче, который «Пруха» проиграл?

1) 1:2; 2) 0:2; 3) 0:4; 4) 0:3; 5) 4:2.

Так как клуб выиграл три игры и при этом забил только 3 мяча, во всех выигранных матчах счёт был 1:0. Соответственно, счёт ничейной игры 0:0, а в проигранном матче счёт 0:4.

30. Вдоль шоссе друг за другом расположены деревни *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* и *G*. В таблице указаны некоторые расстояния между этими деревнями. Например, расстояние от *B* до *E* равно 54 *км*. Чему равно расстояние от *A* до *G*?

A						
	B					
		C				
38			**D**			
	54		40	**E**		
94		68			**F**	
	96			34		**G**

1) 112; 2) 132; 3) 150; 4) 36; 5) 143.

Нас интересует расстояние от пункта A. В таблице даны два значения. Так, известно расстояние от A до F. Но при этом не задано расстояние от F до G. В то же время есть расстояние от A до D, от D до E, от E до G – то, что нам нужно. Поэтому, ответ: $38 + 40 + 34 = 112$.

Мы рекомендуем также рассмотреть часть задач на внимание, логику и сообразительность, которые приведены в конце учебника для 5 класса и были заданы учащимся на лето.

§ 2. Числовая ось. Уравнения с модулем

В данном параграфе мы повторяем, систематизируем и развиваем понятия, введённые ранее.

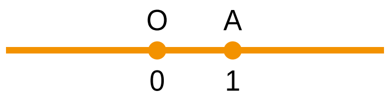


Рис. 1[1]

Как уже не раз говорилось, установление взаимно однозначного соответствия между точками и числами явилось громадным вкладом в развитие математики. Уже в 5 классе мы установили, что каждой точке на прямой линии можно поставить в соответствие число, и обратно, каждому действительному числу ставится в соответствие точка на прямой линии. При этом выясняется, что это можно проделать очень легко: достаточно взять прямую линию и отметить на ней отрезок OA. Левый конец отрезка обозначим цифрой 0 и назовём началом координат, правый – цифрой 1. Запись $A(1)$ следует читать: *точка A имеет координату 1*.

В результате получили числовую ось. Каждой точке числовой оси сопоставляется число, и наоборот, каждому числу сопоставляется точка на числовой оси.

Например, отложив вправо от точки O два отрезка OA, получим точку B, выражающую число 2; пять отрезков – точку C, выражающую число 5.

Отрезки, отложенные влево от начала координат, выражают отрицательные числа. Так, отложив влево от точки 0 четыре отрезка OA, получим точку D, выражающую число -4. Числа 2, 5, -4 называются

[1] Нумерация рисунков в методическом пособии совпадает с нумерацией в учебнике. Рисунки, не вошедшие в учебник, не нумеруются.

координатами точек B, C, D соответственно. Этот факт записывают следующим образом: $B(2)$, $C(5)$, $D(-4)$.

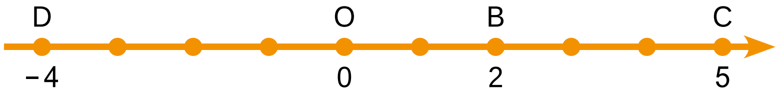


Рис. 2

Запись $S(2{,}5)$ означает, что точка S на числовой оси имеет координату 2,5; запись $T(-7{,}1)$ – что точка T имеет координату $-7{,}1$.

Использование числовой оси проясняет многие математические вопросы. Так, совершенно простой становится задача сравнения чисел: чем правее находится число, тем оно больше. Пять с половиной больше трёх, две третьих больше нуля, один больше минус единицы, минус полтора больше минус четырёх...

Забегая несколько вперёд, отметим, что отрезок AB, посредством которого вводится числовая ось, называется единичным вектором. В результате получается, что имеет место взаимно однозначное соответствие между тремя множествами: множеством точек прямой, множеством действительных чисел и множеством векторов, которые получаются из единичного вектора умножением на число.

После того как введены координаты на прямой, берут две пересекающиеся прямые, вводят на каждой систему координат с началом в точке пересечения прямых. В результате устанавливается взаимно однозначное соответствие между точками плоскости и множеством упорядоченных пар действительных чисел. Затем можно взять три пересекающиеся в одной точке и не лежащие в одной плоскости прямые и ввести координаты в пространстве и так далее. В данном параграфе мы обсуждаем некоторые вопросы, связанные со взаимным расположением двух прямых на плоскости. Тем самым готовимся к введению прямоугольной системы координат в следующем параграфе. Как уже было сказано, для введения системы координат на плоскости достаточно иметь две пересекающиеся прямые. В итоге получится то, что называется косоугольной системой координат. Но наиболее удобна в применении и поэтому широко используется система координат, определяемая перпендикулярными к друг другу прямыми, называемая **декартовой**. Ею мы пользуемся в школьной математике. На уроке или заседании математического кружка стоит ознакомить школьников с жизнью и деятельностью Р. Декарта.

При обсуждении вопроса о взаимном расположении двух прямых некоторое время можно посвятить обсуждению аксиом евклидовой геометрии. Было бы интересно предложить учащимся подготовить доклады о К. Ф. Гауссе, Г. Римане, Н. И. Лобачевском, Омаре Хайаме и его календаре.

Введение координат позволяет прояснить ситуацию с модулем числа. Нужно донести до сознания учеников, что абсолютная величина числа – это расстояние от точки на числовой оси, выражающей данное число, до начала координат. В результате становится понятным решение обратной задачи: определение значения выражения при заданном значении модуля. Так как на одинаковом расстоянии от начала координат находятся две точки, такая задача имеет два решения.

Учащиеся в результате должны осознать несколько правил.

Уравнение с модулем $|x - a| = b$, где b – неотрицательное число, заключает в себе 2 уравнения: $x - a = b$ – там, где $x - a \geq 0$, и $-(x - a) = b$ – там, где $x - a < 0$.

После закрепления этого правила нужно прийти к его обобщению:

Уравнение с модулем $|f(x)| = b$, где b – неотрицательное число, заключает в себе два уравнения: $f(x) = b$ – там, где $f(x) \geq 0$, и $-f(x) = b$ – там, где $f(x) < 0$.

В пункте 2.10 (стр. 16) учебника мы рассматривали уравнения, содержащие только один знак модуля. Рассмотрим, не решая до конца, пример уравнения с двумя знаками модуля:

$|3x - 4| - 7 = |x + 1|$.

Так как имеем случаи $|3x - 4| = 3x - 4$ и $|3x - 4| = -3x + 4$, а также $|x + 1| = x + 1$ и $|x + 1| = -x - 1$, то исходное уравнение распадается на 4 уравнения:

$3x - 4 - 7 = x + 1$,
$3x - 4 - 7 = -x - 1$,
$-3x + 4 - 7 = x + 1$,
$-3x + 4 - 7 = -x - 1$.

Решая их, найдём четыре корня. После этого следует осведомить учащихся о том, что уравнения с модулями могут содержать так называемые посторонние, лишние корни, то есть такие, которые на самом деле не будут решениями исходного уравнения. Поэтому необходимо проверять каждый формально полученный корень, подставляя его значение в исходное уравнение.

§ 3. Прямоугольная система координат на плоскости

В 5 классе мы ввели координаты на числовой прямой. При этом было отмечено, что использование соответствия между точками прямой и числами помогает прояснить многие математические проблемы.

В данном параграфе устанавливается соответствие между точкой на плоскости с парой чисел.

Школьники должны научиться свободно ориентироваться в координатах, без труда находя точку на координатной плоскости по её координатам, и наоборот, быть в состоянии выписать координаты любой точки координатной плоскости.

Что для этого нужно? Как всегда, рецепт один – им нужно потренироваться. А для того чтобы процесс тренировки не был занудным, желательно ввести элемент занимательности.

Медвежонок Винни-Пух, Кролик, Сова, ослик Иа-Иа, Красная Шапочка и многие другие хорошо знакомые персонажи помогают повысить интерес к занятиям.

Мы считаем, что одним из самых действенных способов усвоения материала является сочинение задач по соответствующей теме. Конечно, иногда это очень и очень непросто. Но это не относится к материалу данного параграфа. Сочинить подобные задачи довольно легко.

Очень советуем обратить пристальное внимание на задачу пункта 3.3.

1) На рисунке 13 прочитайте слова, буквы которых имеют координаты:

a) $(6; -2)$ $(2; 6)$ $(4; 4)$ $(-4; 4)$ $(4; 4)$;

b) $(-3; -2)$ $(4; 4)$ $(2; 6)$ $(6; -2)$ $(2; 6)$;

c) $(3; -4)$ $(2; 6)$ $(4; 4)$ $(-4; 4)$ $(3; -4)$ $(2; 6)$ $(4; 4)$ $(-3; -2)$ $(6; -2)$ $(2; 6)$.

2) Запишите с помощью координат слова: a) МАНАС; b) АСТАНА.

Рекомендуем в качестве домашнего задания попросить сочинить похожую задачу. Это само по себе очень полезно. Кроме того, задачи, сочинённые школьниками, могут стать основой для игры, условия которой приведены в данном параграфе.

И, конечно, мы уверены в том, что большой интерес должны вызвать задачи, связанные с картами Кыргызстана и Казахстана.

Удобство, связанное с введением координат, ярко проявляется при решении задач на вычисление площади многоугольника.

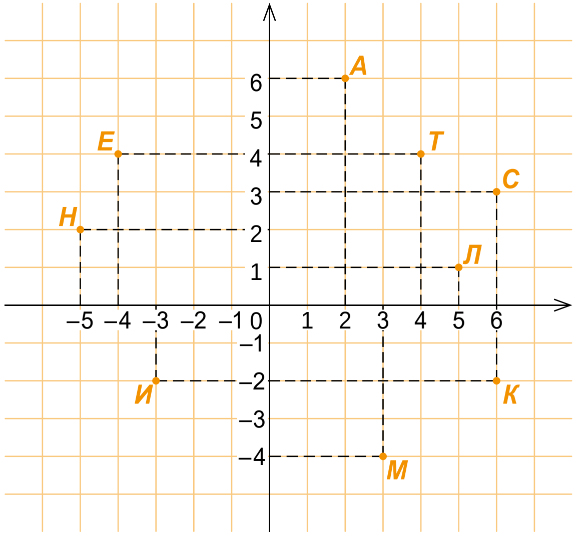


Рис. 13

Знакомясь с соответствующим материалом, узнаём совершенно замечательный факт – если известны координаты вершин, то для того чтобы вычислить площадь любого, подчёркиваем, **любого** многоугольника, достаточно уметь вычислять площадь прямоугольника и прямоугольного треугольника со сторонами, параллельными осям координат. Забегая вперёд, заметим, что метод, изложенный в данном параграфе, является весьма плодотворным при решении более сложных задач. Так, этот способ позволяет решить довольно известную *олимпиадную* задачу.

Задача

Доказать, что все координаты вершин равностороннего треугольника не могут быть рациональными числами.

Решение

Если координаты вершин равностороннего треугольника являются рациональными числами, площадь «окаймляющего» прямоугольника и площади трёх «дополняющих» прямоугольных треугольников будут рациональными числами.

Поэтому рациональным числом должна быть площадь исследуемого треугольника.

Но мы знаем, что площадь равностороннего треугольника со стороной *a* равна произведению числа $a^2/4$ и иррационального числа *корень из трёх*.

Следовательно, утверждение, что все координаты вершин равностороннего треугольника являются рациональными числами, является ложным.

§ 4. Прямо пропорциональная зависимость. Пропорции

Чисто теоретически параграф является довольно простым. В основном, имеет место рассмотрение частного случая линейной функции $y = ax + b$, где $b = 0$. В то же время параграф очень важен в силу громадного числа применений на практике. Ведь функцией вида $y = ax$ выражается зависимость между расстоянием и временем, расстоянием и скоростью, объёмом выполненой работы и производительностью труда, объёмом прямоугольного параллелепипеда и его высотой и многое, многое другое.

Определение основных понятий по данному параграфу, то есть двух прямо пропорциональных величин – коэффициента пропорциональности и отношения – приведены в учебнике.

Очень часто такого рода зависимость появляется при определении числа, составляющего определённый процент.

О процентах говорилось в пункте 4.11 учебника. В пределах того же пункта можно предложить учащимся решить такие задачи: пусть начальная цена товара равна числу C_0. Доказать выполнение формул задач 1–4.

№ задач	Условия задач	Доказать формулы
1	C_0 увеличивается на l% и становится равным числу C_1.	$C_1 = \frac{(100 + l) \cdot C_0}{100}$
2	C_0 уменьшается на l% и становится равным числу C_1.	$C_1 = \frac{(100 - l) \cdot C_0}{100}$
3	C_0 увеличивается на l% и становится равным числу C_1, затем C_1 увеличивается на m% и становится равным числу C_2.	$C_2 = \frac{(100 + l) \cdot (100 + m) \cdot C_0}{10000}$
4	C_0 увеличивается на l% и становится равным числу C_1, затем C_1 уменьшается на m% и становится равным числу C_2.	$C_2 = \frac{(100 + l) \cdot (100 - m) \cdot C_0}{10000}$

На числовом примере можно проверить, как работает любая из формул в последней графе этой таблицы.

Хотим обратить Ваше внимание на задачу пункта 4.4, агитирующую за бережное использование энергии.

Задача

Марина определила, что утепление окон на зиму позволяет уменьшить расходы на отопление на 15%. Сколько сомов может быть сэкономлено, если предполагаемые расходы без утепления равны:

a) 4250 сомов; b) 5408 сомов 8 тыйынов?

Решение

Вспомним, что один процент означает сотую часть числа. Поэтому для того чтобы решить задачу, достаточно вычислить 15 сотых от заданного числа, другими словами, умножить заданное число на 0,15.

Итак, ответ в случае:

a) $0{,}15 \cdot 4250 = 637{,}5$ сома;

b) $0{,}15 \cdot$ (5408 сомов 8 тыйынов) $= 0{,}15 \cdot 5408{,}08 = 811,\ 212$ сома.

Процесс вычисления можно обобщить формулой $s = 0{,}15C$, где буквой s обозначена величина экономии, буквой C – предполагаемые расходы без утепления.

Также в параграфе имеется материал, который может служить иллюстрацией соотношений между общим и частным. Учащиеся должны убедиться в том, что пропорция является частным случаем прямо пропорциональной зависимости. Нужно на примерах ясно показать, что если между двумя переменными есть зависимость вида $y = ax$, то, взяв вместе с любой парой значений переменной x соответствующие им значения y, получим пропорцию.

Например, если $y = 3x$, то, взяв $x_1 = -2$, $x_2 = 4$, получим $y_1 = -6$, $y_2 = 12$. Нетрудно убедиться, что имеет место пропорция $-\frac{2}{4} = -\frac{6}{12}$. Точно так же, если $x_3 = -1{,}2$, $x_4 = 4{,}5$, получим $y_3 = -3{,}6$, $y_4 = 13{,}5$. Здесь имеет место пропорция $-\frac{1,2}{4,5} = -\frac{3,6}{13,5}$.

Так же на примерах нужно продемонстрировать, что наличие пропорции не гарантирует существования прямо пропорциональной зависимости. Задача с футбольным клубом является довольно наглядной.

Ваши школьники ещё этого не знают, но вам будет удобно знать следующий геометрический факт: если взять график, выражающий нелинейную зависимость, например параболу, и прямую, проходящую через начало координат и пересекающую исходный график хотя бы в двух точках, то координаты точек пересечения будут образовывать пропорцию.

Можно предложить учащимся доказать этот факт, если они сталкивались с понятием подобных треугольников. Далее, с помощью пропорции можно переводить радианное измерение углов в градусное и наоборот.

И куда без них, наличие пропорции удобно проверяется на языке умножательных волшебных таблиц.

И последнее замечание к этому параграфу: не говоря об этом в явном виде, мы фактически начинаем работать с алгебраическими дробями.

Конечно, задания типа

Решите уравнение:

$$\frac{2x + 21}{14 - 2x} = \frac{7}{3}$$

будут более основательно изучаться в последующих классах.

§ 5. Смеси

Параграф носит вспомогательный характер. Главная его цель – подготовить школьников к восприятию материала следующего параграфа – систем линейных уравнений. Но это не означает, что к этому материалу можно отнестись без должного уважения. В процессе его изучения учащиеся столкнутся с большим количеством разнообразных приложений.

Задачи на определение цены

Тимур купил 3 кг картофеля и 2,5 кг лука, заплатив 99 сомов. Сколько стоил картофель, если цена лука была 18 сом./кг?

Задачи на составление смеси определённого объёма

Сколько килограммов семян травы А стоимостью 50 сом./кг нужно смешать с 10 кг семян травы В стоимостью 75 сом./кг, чтобы получить смесь стоимостью 60 сом./кг?

Задачи на химические растворы

Сколько литров 70%-ого раствора соли нужно добавить к 24 литрам 30%-ого раствора для того чтобы получить 45%-ый раствор?

И многое другое.

Простое перечисление типов рассматриваемых задач указывает на важность материала в осуществлении межпредметных связей.

В конце параграфа обсуждаем линейные уравнения, зависящие от двух переменных. Нужно продемонстрировать, что такие уравнения имеют много решений.

На лугу пасутся овцы и гуси. На вопрос, сколько овец на лугу, Касым ответил, что насчитал 126 ног. Насколько корректен ответ Касыма?

Понятно, что ответ Касыма фактически ни о чём – условиям задачи отвечают много решений. Количество овец может быть от одной до 31.

Будет полезно показать задачи, в которых линейные уравнения от двух переменных имеют единственное решение за счёт текстовых условий задачи.

Катя собирается купить мороженое за 16 сомов. Как она может заплатить без сдачи, если у неё есть только монетки достоинством 3 сома и 5 сомов?

Так как количество монеток может быть только целым неотрицательным, из всех решений уравнения $3x + 5y = 16$ условиям удовлетворяет только одно: 2 монетки по 5 сомов и 2 монетки по 3 сома.

§ 6. Простейшие системы линейных уравнений

В этом параграфе изучаются системы двух линейных уравнений, зависящих от двух переменных. Характерной особенностью систем, которые будут изучаться в 6 классе, является то, что в одном из уравнений одна, а в большинстве случаев обе переменные имеют коэффициент «единица». Этот факт позволяет очень легко выразить одну переменную через другую и свести процесс решения системы к решению линейного уравнения от одной переменной.

Поэтому мы назвали такие системы простейшими.

При прохождении материала пункта 6.1 учебника важно объяснить учащимся, что и усложнённые системы уравнений зачастую легко сводятся к простейшим. Например, система уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x+7y}{6} - \dfrac{3x-4y}{8} = \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{11x-9y}{10} + \dfrac{x+15y}{4} = \dfrac{13}{2} \end{cases}$$

легко упрощается, если обе части первого уравнения умножить на 24, а обе части второго – на 20, и затем привести подобные члены. В результате получается система двух строчных, «гладких» уравнений без каких бы то ни было дробей.

Не рано ли изучать системы в 6-м классе? Единого мнения на этот счёт не существует. Мы считаем, что, если какие-то методы, понятия позволяют внести дополнительную ясность, упростить понимание различных жизненных ситуаций, не нужно медлить с их введением. Так, в книжке «Нестандартные задачи по математике в 1 классе»[1], написанном Г. Г. Левитас, приведена задача:

На стоянке стоят 10 автомобилей, легковых и грузовых, у которых по 4 и 6 колёс, соответственно. Всего у них 46 колёс. Сколько каких автомобилей на стоянке?

Изучая материал параграфа, учащиеся убедятся, что системы линейных алгебраических уравнений являются замечательным инструментом моделирования самых различных явлений.

Используя такие системы, можно обсуждать различные явления.

Явления спорта

«Тигры» выиграли у «Львов» в баскетбол 23 очка. После игры тренер «Львов» сказал, что если бы они набрали в два раза больше очков, то выиграли бы 19 очков. С каким счётом закончилась игра?

Торговля

Магазин имеет два вида конфет, первый по $20 за килограмм, второй – по $12. Сколько килограммов конфет каждого вида было продано, если за 90 кг конфет получено $1400?

Лакомства

Было 6 кусков торта. Некоторые из этих кусков разрезали на четыре части, оставшиеся – на две. В итоге получилось 22 кусочка. Сколько кусков было разрезано на 2 части?

---

[1] Г. Г. Левитас. Нестандартные задачи по математике в 1 классе. – М.: Илекса, 2002.

Результаты контрольной работы

На контрольной работе предложено 30 вопросов. За каждый правильный ответ даётся 2 балла, за каждый неправильный – снимается полбалла. Магомед ответил на все вопросы и получил 28 баллов. Сколько неправильных ответов дал Магомед?

Геометрические задачи

1) Периметр прямоугольной пластины равен 112 см, основание больше высоты на 14 см. Чему равна максимальная площадь квадрата, который можно вырезать из этой пластины?

2) Периметр прямоугольника, одна сторона которого совпадает со стороной равностороннего пятиугольника, а другая, смежная, со стороной квадрата, равен 58 мм. При этом периметр пятиугольника больше периметра квадрата на 82 мм. Чему равна площадь квадрата?

В учебнике есть некоторое количество задач, в которых прослеживаются межпредметные связи.

Это задачи типа:

Фирмы «Альфа» и «Бета» в 1-й год получили прибыль 432 млн сомов. Во 2-й год прибыль «Альфы» увеличилась на 25%, прибыль «Беты» уменьшилась на 20%, а общая прибыль не изменилась. Чему была равна прибыль каждой фирмы в 1-й год?

У Таалая 500 овец и коз. Средний вес овцы 38 кг, козы – 32 кг, а средний вес животного в этом стаде равен 37,1 кг. Сколько овец и сколько коз у Таалая?

Для приготовления 60 литров 41%-го раствора соли использовались 44% и 32% растворы. Сколько литров каждого раствора было использовано?

Мы считаем, что подобные задачи должны быть в учебниках. Наш учебник предназначен не только для будущих математиков. Будущих поэтов мы тоже уважаем. Возможно, некоторых из них вдохновит следующее стихотворение – и они не только решат эту задачу, но и напишут свои стихи с математическим содержанием.

По тропинке вдоль кустов
Шли 11 хвостов.
Сосчитать я также смог,

Что шагало 30 ног.
Это вместе шли куда-то
Петухи и жеребята.
А теперь вопрос таков:
Сколько было петухов?
И узнать я был бы рад,
Сколько было жеребят?

И. Шангина

И в заключение приведём цитату из книги известного педагога И. Ф. Шарыгина «Факультативный курс по математике»[1]: «В некоторых местах мы, объясняя решение, для краткости будет использовать не совсем аккуратные, но вполне понятные обороты, как, например, «умножим уравнение на...», «сложим два уравнения», «перемножим два уравнения» и т. д. Понятно, что соответствующая операция производится с каждой частью (частями) уравнения (уравнений), в результате чего получается новое уравнение».

§ 7. Свойства позиционной системы записи натуральных чисел

Мы довольно подробно говорили о натуральных числах в 5 классе. Но, как и практически любой математический объект, свойства натуральных чисел почти неисчерпаемы. К ним можно возвращаться и возвращаться на более высоком уровне. В данном случае область наших исследований значительно расширяется благодаря использованию систем уравнений.

При этом важно напомнить основные понятия. В частности, известно, что школьники очень часто не могут точно идентифицировать цифры. Поэтому важны яркие запоминающиеся примеры.

*Найдите значение дроби **Т·Е·Л·Е·В·И·З·О·Р/(К·И·Н·О)**, где каждой букве соответствует цифра.*

На первый взгляд, очень странная задача и условий явно не хватает. Но чёткое понимание того, что есть цифры, позволяет легко решить задачу.

Известно, что цифр десять. Дробь также содержит десять различных букв. Значит, одна из букв обозначает цифру ноль. Она не может стоять в знаменателе – нельзя делить на ноль. Следовательно, ноль стоит в числителе. Поэтому значение дроби равно нулю.

[1] И. Ф. Шарыгин. Факультативный курс по математике. – М.: Просвещение, 1989.

Часто бывает необходимо опираться на элементарные свойства цифр.

Целесообразно в рамках пунктов 7.6, 7.7 учебника предложить классу разобрать такую задачу. Если возводить в квадрат числа 15, 25, 35, 45, ..., 85, 95, то в качестве результатов будут числа, оканчивающиеся обязательно на 25, а перед этими цифрами будет число, равное произведению первой цифры в числах 15, 25, 35, 45, ..., 85, 95 на цифру, которая на единицу больше этой первой цифры. Например, при вычислении значения выражения 85^2 в конце результата будет 25, а до этих цифр – число $8 \cdot (8 + 1) = 72$. Итак, $85^2 = 7225$. Учащимся можно предложить выяснить, *почему так получается*. Для этого надо напомнить им, что целое двузначное число из цифр x и y обозначается в виде $\overline{xy}$ и что $\overline{xy} = 10x + y$. Значит, дело сводится к вычислению выражения $(10x + y)^2$ и к соответствующим выкладкам.

Задача

Если к двузначному числу прибавить единицу, то сумма цифр полученного числа будет в 5 раз меньше суммы цифр исходного числа. Найдите это число.

Решение

Опять странная, на первый взгляд, задача. Как это – после прибавления происходит уменьшение в 5 раз. Но можно быстро сообразить, что в одной ситуации после прибавления единицы сумма цифр уменьшается: $9 + 1 = 10$. После этого достаточно перебрать варианты, прибавляя к двузначным числам, заканчивающимся на 9, единичку. Ответ: 19.

Эту задачу можно решить, не перебирая варианты, а используя тот факт, что исходное число в данном случае имеет вид $\overline{x9} = 10x + 9$. Если к нему прибавить 1, то получаем число $10 \cdot (x + 1)$, у которого сумма цифр равна величине $x + 1$. Значит, имеем уравнение $x + 1 = \dfrac{x + 9}{5}$, откуда $x = 1$. Тогда искомое число $\overline{x9} = 19$.

Полезно показать школьникам удобные формы записи математических выражений.

Задача

Найдите значения семи последовательных натуральных чисел, зная, что их сумма равна 539.

Решение

Решение будет очень простым, если ввести удачные обозначения. Здесь будет удобно обозначить через x среднее, четвёртое число. Тогда сумма семи последовательных натуральных чисел запишется в виде

$(x - 3) + (x - 2) + (x - 1) + x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3)$.

Понятно, что сумма равна $7x$, и из уравнения $7x = 539$ получим $x = 77$. Следовательно, искомые числа: 74, 75, 76, 77, 78, 79, 80.

Нужно обращать внимание и на технику выполнения арифметических действий.

Задача

Рамиля в черновике решила пример

$2012 \cdot 2013 \cdot 2014 \cdot 2015 \cdot 2016 \cdot 2019 =$

В тот момент, когда она собиралась переписать последнюю цифру, Закир решил проветрить комнату и открыл окно. Ветерок подхватил листочек с черновыми записями и унёс в окно. Как вы думаете, что делать Рамиле: бежать вниз с пятого этажа или перерешивать?

Решение

Конечно, правильный ответ: *ни то и ни другое*. Достаточно вспомнить, что последняя цифра произведения есть последняя цифра произведения последних цифр сомножителей.

Поэтому, так как среди последних цифр сомножителей есть цифра 5 и *чётные цифры*, ответ – *ноль*. Напомним, что под ответом здесь понимается *не весь результат умножения* данных шести чисел, а *только последняя цифра* этого результата.

§ 8. Делимость чисел

Параграф очень важен по многим причинам. Признаки делимости активно используются при определении наименьшего общего кратного и наибольшего общего делителя, которые, в свою очередь, играют важную роль при работе с обыкновенными дробями.

Методическая особенность данного параграфа в том, что в нём приведены несколько утверждений с доказательствами. Учащиеся должны увидеть, что признаки делимости «не упали с неба», что они естественным образом появляются из правил записи натуральных чисел в десятичной позиционной системе. При этом, по нашему мнению, не нужно добиваться того, чтобы соответствующие доказательства могли воспроизвести все шестиклассники. Достаточно того, чтобы они увидели, как это делается. Гораздо важнее, чтобы учащиеся знали, как пользоваться этими свойствами. Как мы уже не раз говорили, очень полезны задачи, которые школьники составляют сами. Конечно, к таким задачам учащихся нужно подводить постепенно.

Докажите, что число 111 делится на 3.

После такой задачи, поговорив о делимости на 3, можно предложить учащимся следующую задачу.

Задача

Написать наименьшее число, которое делится на 9. При этом для записи числа можно использовать:

a) только цифру 1;
b) только цифру 2;
c) только цифру 3;
d) только цифры 1 и 2.

Решение

На основе свойства делимости на 9 – сумма цифр, из которых составлено число, должно делиться на 9 – получаем ответы:

a) 111111111;
b) 222222222;
c) 333;
d) 12222.

Несколько отличны по своему характеру признаки делимости на 2, 5 и их степени.

Задача

Написать наименьшее число, которое делится на 4. При этом для записи числа можно использовать:

a) только цифры 0 и 2;
b) только цифры 0 и 1;
c) только цифры 0 и 6;
d) только цифру 6.

Решение

На основе свойства делимости на 4 – на 4 должно делиться число, которое получится, если в исходном числе вычеркнуть все цифры, кроме двух последних, – получаем ответы:

a) 20;
b) 100;
c) 60;

d) Это невозможно, так как 66 на 4 нацело не делится.

Довольно много задач, решение которых определяется чётностью чисел. Может показаться, что это понятие слишком простое для того чтобы можно было сформулировать серьёзные задачи. Но это не так.

Задача

Дан ряд чисел 1, 2, 3, ...,11, 12, 13, ..., 97, 98. Теперь вместо любой пары из этих чисел можно вставить или их сумму, или их разность. На следующем шаге процесс повторяется. В итоге, повторив эту процедуру много раз, в конце получим одно число. Докажите, что в любом случае оно не будет равно нулю.

Решение

Сумма или разность двух чётных, как и двух нечётных чисел, всегда чётное число. В то же время и сумма, и разность чётного и нечётного чисел является нечётным числом. Следовательно, после каждого шага количество нечётных чисел в ряду или не изменится, или уменьшится на 2. То есть чётность количества нечётных чисел не меняется. Так как в исходном ряду количество нечётных чисел нечётно – их 49, оставшееся в конце концов число будет нечётным – не нулём.

В заключение этого параграфа, если есть время, можно рассмотреть признак делимости на 11, или можно сделать это на математическом кружке. Как и в других случаях, доказательство построено на свойствах десятичной позиционной системы.

Нужно предложить школьникам убедиться в том, что числа 10, 1000, 100 000... можно записать в виде $10 = 11 - 1$; $1000 = 1001 - 1$; $100\,000 = 100\,001 - 1$..., где уменьшаемые делятся на 11.

С тем же успехом числа 1, 100, 10 000... можно записать в виде $1 = 0 + 1$; $100 = 99 + 1$; $10\,000 = 9999 + 1$... В этих случаях на 11 делятся первые слагаемые.

Отсюда получаем, что если число справа налево записано цифрами a, b, c, d, e..., то его можно записать в виде:

$a \cdot 1 + b \cdot 10 + c \cdot 100 + d \cdot 1000 + e \cdot 10000 + \ldots =$

$= a(0 + 1) + b \cdot (11 - 1) + c \cdot (99 + 1) + d \cdot (1001 - 1) + e \cdot (9999 + 1) + \ldots$

Раскрыв скобки и собрав вместе первые члены, получим число, которое делится на 11. Кроме этого числа, останется выражение $a - b + c - d + e - \ldots$.

В результате получаем, что исходное число делится на 11, если на 11 делится число $a - b + c - d + e - \ldots$.

Переформулировав полученное утверждение, запишем признак делимости на 11 в следующем виде:

Число делится на 11, если разность между суммами цифр, стоящих на нечётных местах, и цифр, стоящих на чётных местах в записи исходного числа, делится на 11.

При этом понятно, что число 0 делится на 11.

Для закрепления этого признака можно предлагать разные задачи, в частности, такого типа:

Определите «в уме», делится ли на 11 число:

a) 202; b) 9031; c) 88067; d) 34567896?

§ 9. Разложение натуральных чисел на множители. НОК

В этом параграфе продолжается подготовительная работа к усвоению материала, связанного с действиями над обыкновенными дробями. О важности данного материала говорит то, что изучение простых чисел является одним из основных разделов математической дисциплины под названием *теория чисел*.

Для того чтобы повысить интерес шестиклассников к материалу, мы ввели методическое новшество – активно используются задачи на «совместную работу». Стоит отметить, что для решения таких задач достаточно использовать общее кратное. Нет особой необходимости находить наименьшее. Но при случае этим не нужно пренебрегать – следует продемонстрировать учащимся, что использование НОК помогает сделать вычисления менее громоздкими.

В учебнике использован чисто арифметический способ решения задач. В классах постарше будем активно использовать алгебраический подход. Однако некоторые элементы алгебраического подхода могут быть использованы и при работе с шестиклассниками.

Задача

Асылбек один может съесть маленький торт за 50 минут, а вместе с Айсулуу – за 30 минут.

За сколько времени может съесть этот торт одна Айсулуу?

Решение

Обозначив через x время, за которое может съесть этот торт одна Айсулуу, получим, что за время $50x$ Асылбек мог бы, сохраняя скорость, съесть x тортов, Айсулуу могла бы съесть

50 тортов. Следовательно, за время $50x$ Асылбек и Айсулуу вместе могли бы съесть $50 + x$ тортов. Отсюда получаем уравнение $\frac{50x}{50 + x} = 30$. Избавившись от знаменателя и раскрыв скобки, получим: $50x = 1500 + 30x$. Тогда $x = \frac{1500}{20} = 75$ минут.

Эту задачу можно решить арифметическим способом, без иксов, как показано в учебнике. В этом случае должно получиться:

$$50 \cdot \frac{30}{50 - 30} = 75.$$

В учебнике приведён арифметический способ решения более сложной задачи.

Задача

Работая вместе, Шайлоо, Аида и Атыр могут нарезать морковь для плова за 9 минут. Если эту работу будет выполнять один из них, то Аида может выполнить её за 22 минуты, Атыр – за 18 минут. За какое время может нарезать морковь Шайлоо?

Решение

Вычислим наименьшее общее кратное чисел 9; 22 и 18. НОК для 9 и 22: НОК (9; 22) = $9 \cdot 22 = 198$. НОК для 18 и 198 будет наименьшим общим кратным для исходной тройки чисел. Так как 198 делится на 18, НОК (198; 18) = 198.

Работая вместе, за 198 минут они могут выполнить эту работу $198 : 9 = 22$ раза. При этом Аида может её выполнить $198 : 22 = 9$ раз, Атыр – $198 : 18 = 11$ раз.

Итак, Шайлоо за 198 минут может нарезать морковь $22 - (9 + 11) = 2$ раза. Отсюда получаем, что один раз он может нарезать морковь за $198 : 2 = 99$ минут.

Покажем другой способ решения. Аида и Атыр могут нарезать морковь для плова за: $22 \cdot \frac{18}{22 + 18} = 9{,}9$ минут. Обозначив через x время, за которое может нарезать морковь Шайлоо, получим уравнение $\frac{9{,}9x}{9{,}9 + x} = 9$.

Отсюда $9{,}9x = (9{,}9 + x)9$.

Раскрыв скобки, получим: $0{,}9x = 9{,}9 \cdot 9$.

Тогда $x = 9{,}9 \cdot 10 = 99$ минут.

§ 10. Равенство обыкновенных дробей. НОД

Конечно, после того как в предыдущем параграфе обсуждалось наименьшее общее кратное, в этом параграфе естественным образом говорится о наибольшем общем делителе. При этом НОД в первую очередь, как обычно принято, используется для упрощения обыкновенных дробей. В то же время, и в этом параграфе используется некоторое методическое новшество. Мы предлагаем множественный подход: оказывается, НОК можно рассматривать как произведение элементов *объединения* множеств простых множителей, на которые разложены исходные числа. В то же время произведение элементов *пересечения* указанных множеств даёт НОД.

Для того чтобы повысить интерес к изучаемой теме, значительное внимание уделено задачам на деление в заданном отношении.

Задача

Иван проработал 413 часов, Валентина – 236 часов. Как плату за работу они получили 33 тысячи. Как они должны поделить заработанное, если каждый час работы оценивается одинаково?

Решение

Заработок должен быть поделён в отношении 413 : 236. Для того чтобы прояснить картину, преобразуем отношение к более простому. Как уже было сказано, наиболее простой вид дробь примет, если её разделить на НОД числителя и знаменателя.

Итак, найдём НОД для 413 и 236. Сразу видно, что число 236 можно разделить на 4. Тогда $236 = 4 \cdot 59$. Другое число, 413, на 4 не делится. Попробуем его разделить на 59. Нам повезло, так как $413 = 7 \cdot 59$. Так как числа 4 и 7 взаимно простые, других общих множителей нет. Следовательно: $413/236 = 7/4$.

В итоге мы определили, что заработок нужно поделить на $7 + 4 = 11$ равных частей и отдать Ивану 7 частей, а Валентине 4. Так как $33 : 11 = 3$, получаем, что каждой части соответствуют 3 тысячи. Отсюда получается, что Ивану положено $7 \cdot 3 = 21$ тысяча, а Валентине: $4 \cdot 3 = 12$ тысяч.

§ 11. Действия над обыкновенными дробями

Как следует из названия параграфа, речь идёт об арифметических действиях над дробями. При этом рассматриваются разные виды обыкновенных дробей: правильные, неправильные, смешанные.

В связи с этим мы также говорим о том, как преобразовать один вид дробей в другой. Также обсуждаются правила сравнения дробей.

В рамках пунктов 11.7 и 11.10 учебника необходимо учесть некоторые важные моменты.

1) В пункте 11.7 (Сумма и разность обыкновенных дробей) нужно заострить внимание учащихся на том, что есть два основных способа оформления процесса сложения и вычитания двух обыкновенных дробей. Например, как оформить вычисление выражения $\frac{7}{6} - \frac{1}{4}$?

Первый способ состоит в том, чтобы *сперва обе исходные дроби записать в преобразованном виде*, то есть сведя их к дробям с одинаковыми знаменателями. Тогда имеем:

$$\frac{7 \cdot 2}{6 \cdot 2} - \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{14}{12} - \frac{3}{12} = \frac{11}{12}.$$

Здесь числители и знаменатели исходных дробей умножались на дополнительные множители 2 и 3.

Второй способ оформления процесса вычисления состоит в том, что *вместо двух исходных дробей сразу пишется одна результирующая дробь*:

$$\frac{7}{6} - \frac{1}{4} = \frac{14 - 3}{12} = \frac{11}{12}.$$

Здесь подразумевается, что наименьший общий знаменатель 12 поочерёдно делится на знаменатели 6 и 4, и получающиеся при этом соответствующие дополнительные множители записываются над косой чертой (над соответствующими числителями) и затем перемножаются с этими числителями.

2) В пункте 11.7 или при изложении материала пункта 11.10 (Отработка техники вычислений с дробями) необходимо объяснить аудитории, что при нахождении НОЗ нескольких обыкновенных дробей в одних случаях лучше использовать процесс нахождения НОК (оно же будет и НОЗ) путём разложения знаменателей на простые множители, а в других случаях предпочтительнее обойтись без такого разложения.

Случай 1: знаменатели – небольшие числа. Например, при нахождения НОЗ для дробей $\frac{7}{18}$ и $\frac{1}{12}$ сказать учащимся так: исходим из большего знаменателя. Число 18 не годится в качестве НОЗ, так как не делится на 12. Тогда к 18 добавляем ещё 18 – получаем число 36, делящееся и на 18, и на 12. Значит, число 36 и будет НОЗ для 18 и 12. Итак, в случае небольших знаменателей НОЗ находится с помощью наращивания большего из знаменателей путём прибавления к нему самого себя. То есть не надо проводить разложение знаменателей на простые множители.

Случай 2: знаменатели – большие числа. Например, для случая дробей $\frac{7}{320}$ и $\frac{1}{288}$ прибавлять к 320 каждый раз число 320 и затем проверять, делится ли полученное число на 288, будет очень утомительно. В таком случае лучше разложить оба знаменателя на простые множители и найти НОЗ по правилу нахождения НОК, которое и будет НОЗ.

Случай 3: оба знаменателя – разные простые числа или даже *составные, но при этом взаимно простые.* В таких случаях тоже не надо проводить разложение знаменателей на простые множители, и НОЗ находится прямым перемножением знаменателей исходных дробей. При этом не надо торопиться фактически перемножать их, а достаточно лишь обозначить это произведение, чтобы легче было находить дополнительные множители. Например,

$$\frac{7}{25} + \frac{1}{12} = \frac{12 \cdot 7 + 25 \cdot 1}{25 \cdot 12} = \cdots,$$

то есть лишь в самом конце находим фактический результат произведения $25 \cdot 12$.

3) В рамках пункта 11.7 учебника (но чем раньше, тем лучше) резонно будет напомнить учащимся, как вводить в скобки ту или иную группу слагаемых, составляющих данное выражение, причём показать оба случая ввода: со знаком плюс перед создаваемыми скобками и со знаком минус перед ними.

4) Полезно будет напомнить учащимся, что запись «$a/b + c$» означает следующее: сперва a делится на b, а затем к результату деления добавляется c. А в случае записи «$a/(b + c)$» сперва складываются b и c, затем a делится на результат сложения.

Перед преподавателем стоит трудная задача – нужно научить работать с дробями и не перегрузить учащихся вычислениями. Не злоупотребляйте заданиями типа тех, что приведены в конце параграфа. Одна из главных причин, почему мы их рассматриваем – к сожалению, такого рода задания являются частыми гостями на экзаменах. Если загружать детей заданиями подобного рода, большинство из них предпочтёт держаться подальше от такой математики.

Следуя нашему принципу не превращать уроки в унылые занятия, на которых слишком много времени тратится на арифметические операции ради арифметических операций, а также в соответствии с нашим убеждением, что для успешного обучения нужны ситуационные задачи, предлагаем нижеследующую серию задач. При этом важно, чтобы ученики не только решали уже готовые задачи, а чтобы и сами учились их составлять.

Надо объяснить им, что с этой целью необходимо применять метод комбинирования в широком смысле, под которым понимается тот или иной набор различных явлений, процессов, действий или предметов, в том числе и математических объектов (точек, линий, фигур, геометрических тел). Другими словами, достаточно выбрать какую-либо узкую тему и самим создавать различные ситуации, просто учитывая, что есть арифметические действия. А их наличие должно наталкивать на мысль, что для составления задач можно взять, например, геометрические объекты и всячески менять их размеры (длины элементов, составляющих эти объекты), а потом сравнивать периметры, площади и объёмы получающихся и исходных объектов. Итак, в качестве примера по обучению учащихся самостоятельной разработке ситуационных задач предлагаем четыре задачи. Их лучше всего показать учащимся либо в рамках пункта 11.10 (Отработка техники вычислений с дробями) из учебника, либо при рассмотрении пункта 11.11 (Блочный принцип вычислений) из того же источника, либо же в какой-то другой момент времени в зависимости от ситуации.

Задача 1. Длина и ширина (основание и высота) прямоугольника увеличиваются *на две разные величины*. Найти:

a) *на сколько* возрастёт периметр прямоугольника?

b) *во сколько* раз увеличится периметр прямоугольника?

c) *на сколько* возрастёт площадь прямоугольника?

d) *во сколько* раз увеличится площадь прямоугольника?

Задача 2. Длина и ширина (основание и высота) прямоугольника увеличиваются *на одну и ту же величину*. Вопросы к этой задаче те же, что и к задаче 1.

Задача 3. Длина и ширина (основание и высота) прямоугольника увеличиваются *в разные количества раз*. Вопросы к этой задаче те же, что и к задаче 1.

Задача 4. Длина и ширина (основание и высота) прямоугольника увеличиваются *в одинаковое количество раз*. Вопросы к этой задаче те же, что и к задаче 1.

Как компактно и с математической точки зрения удобно оформить формулировку этих задач? Для этого введём обозначения:

a – длина (основание) исходного (первоначального) прямоугольника;

b – ширина (высота) исходного (первоначального) прямоугольника);

c и d – величины, на которые в условиях задачи 1 увеличиваются a и b соответственно (тогда в условиях задачи 2: $c = d$);

k и m – числа, показывающие, во сколько раз в условиях задачи 3 увеличиваются a и b соответственно (тогда в условиях задачи 4: $k = m$);

P_1 и P_2 – периметры исходного и нового прямоугольников сответственно;

S_1 и S_2 – площади исходного и нового прямоугольников соответственно.

Тогда серию задач 1–4 можно оформить в виде следующей таблицы:

№ задач	стороны исходного прямоугольника	стороны нового прямоугольника	a) $P_2 - P_1$	b) $\frac{P_2}{P_1}$	c) $S_2 - S_1$	d) $\frac{S_2}{S_1}$
1	a b	$a + c$ $b + d$	$2 \cdot (c + d)$	$1 + \frac{c + d}{a + b}$	$ad + bc + cd$	$\frac{(a + c) \cdot (b + d)}{ab}$
2	a b	$a + c$ $b + c$	$4c$	$1 + \frac{2c}{a + b}$	$(a + b + c) \cdot c$	$\frac{(a + c) \cdot (b + c)}{ab}$
3	a b	ak bm	$2 \cdot (ak + bm - a - b)$	$\frac{ak + bm}{a + b}$	$ab \cdot (km - 1)$	km
4	a b	ak bk	$2 \cdot (a + b) \cdot (k - 1)$	k	$ab \cdot (k^2 - 1)$	k^2

В чём же проявились здесь элементы комбинирования?

Во-первых, мы производили увеличение исходных размеров и **на какую-то величину**, и **в какое-то количество раз** (то есть использовали и сложение, и умножение). При этом мы меняли исходные размеры (длину и ширину) и **одинаково**, и **в разной степени**.

Во-вторых, мы сравнивали исходные и новые прямоугольники и **по периметру**, и **по площади**.

В-третьих, сравнивали периметры и площади исходных и новых прямоугольников, задавая вопросы «**На сколько** возрастёт?» и «**Во сколько раз** увеличится?»

По части выбора объектов исследования учащимся можно рекомендовать следующее:

- квадрат – в этом случае дело упрощается ввиду того, что $a = b$;
- прямоугольный треугольник (для простоты можно взять случай равных катетов) – в этом случае надо будет ознакомить класс с теоремой Пифагора. Мы сторонники того, что иногда ради пользы дела резонно чуть забежать вперед, так как отказ

от какой-либо теоремы или формулы только ввиду её отсутствия в рамках данной программы создает большой дискомфорт и резко ограничивает возможность побудить учащихся к элементам самостоятельного исследования.

- Окружность и круг.

По части изменения исходных размеров объектов (сторона квадрата, катет прямоугольного треугольника, радиус и диаметр окружности):

- можно и увеличивать, и уменьшать **на какую-то величину**;
- можно и увеличивать, и уменьшать **в какое-то количество раз**.

Важно напомнить классу, что в чисто арифметическом плане понятия «увеличить или уменьшить на столько-то» и «увеличить или уменьшить во столько-то раз» весьма относительны. Например, уменьшение величины a на 5 означает её «увеличение» на (-5), то есть: $a - 5 = a + (-5)$. (*)

Аналогично уменьшение величины a в 5 раз означает «увеличение» в 1/5 раза, то есть: $a/5 = a \cdot 1/5$. (**)

Другими словами, надо пояснить учащимся, что для начала они могут составить и решить задачу для случая «чистого» увеличения, а затем использовать полученную формулу в задаче с «чистым» уменьшением, то есть применить равенство (*). Этот же принцип рассуждений годен и по отношению к равенству (**).

Итак, нет необходимости долго решать сложные в вычислительном плане задачи на вычисления с обыкновенными дробями. В подавляющем большинстве случаев достаточно перейти к десятичным, произведя разумное округление. Поэтому рекомендуем: выполнив действия с обыкновенными дробями, предложите проделать их с преобразованными в десятичные дроби выражениями (с соответствующими округлениями) и сравнить ответы. Помимо этого, используйте обычный рецепт – уделяйте внимание занимательным задачам.

Примечание 1: в рамках пункта 11.10 учебника следует напомнить учащимся, что не всякую обыкновенную или смешанную дробь можно обратить в конечную десятичную дробь. В общем случае это возможно только для таких обыкновенных или смешанных дробей, у которых в разложении знаменателя на простые множители присутствуют либо только двойки, либо только пятёрки, либо двойки и пятёрки в определённых степенях.

Например, дроби $\frac{11}{64}$, $\frac{117}{25}$ и $3\frac{7}{200}$ можно обратить в конечные десятичные дроби, так как знаменатель первой дроби равен 2^6 – в разложении участвуют только двойки, знаменатель второй дроби равен 5^2 – в разложении участвуют только пятёрки, знаменатель третьей дроби равен $2^8 \cdot 5^2$ – в разложении участвуют только двойки и пятёрки.

А вот дробь $\frac{11}{48}$ в конечную десятичную дробь не обращается, так как её знаменатель равен $2^4 \cdot 3$ – в разложении кроме множителя 2 участвует множитель 3.

Примечание 2: в рамках пункта 11.10 необходимо также напомнить аудитории о стандартном виде записи чисел ($a \cdot 10^n$).

Примечание 3: в этом же пункте важно повторить и тонкости деления десятичных дробей. Например, в случае вычисления значения выражения $\frac{0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,1}{0,6 \cdot 0,5}$ резонно отдельно вычислить числитель и отдельно знаменатель и свести данное выражение к дроби, у которой и в числителе, и в знаменателе окажется всего лишь по одному числу. Но если требуется подсчитать значения выражения $\frac{0,48 \cdot 0,36 \cdot 0,12}{0,64 \cdot 0,45}$, то не будет разумным отдельно вычислять числитель и отдельно знаменатель, перемножая несколько двузначных чисел, а затем ещё и сокращать довольно большие числа. В этом случае лучшим способом будет вместо исходных множителей, участвующих в числителе и знаменателе, записать целые числа, но затем домножить знаменатель на 100. В итоге появляется возможность удобного сокращения получившихся новых, но уже целых множителей числителя и знаменателя, вместо нежелательного перемножения множителей числителя между собой и множителей знаменателя между собой.

Задача

На день рождения к Айбике пришли семь её подруг. Первой подруге досталась $\frac{1}{8}$ часть торта. Второй – $\frac{1}{7}$ часть остатка, третьей – $\frac{1}{6}$ часть остатка после второй и так далее. Последний кусок Айбике поделила с седьмой подругой пополам. Кому достался самый большой кусок?

Решение

После первой подруги осталось $\frac{7}{8}$ торта. Поэтому $\frac{1}{7}$ от остатка – это $\frac{1}{7} \cdot \frac{7}{8} = \frac{1}{8}$ торта. Следовательно, после второй подруги остаётся $\frac{6}{8}$ торта. Затем $\frac{1}{6} \cdot \frac{6}{8} = \frac{1}{8}$ и так далее. На последнем шаге Айбике делит с подругой $\frac{2}{8}$ торта. Значит, Айбике и её седьмой подруге досталось по $\frac{1}{8}$ части торта. Итак, всем восьмерым подругам достались одинаковые куски, равные $\frac{1}{8}$ части всего торта.

Задача

Дана дробь $\frac{13}{17}$. Какое число нужно вычесть из числителя и знаменателя, чтобы получить дробь $\frac{2}{3}$?

Решение

Ответ можно получить как результат разумного подбора. Знаменатель 3 получится, если от 17 отнять 14. Но тогда не получится нужный числитель. Также знаменатель 3 может получиться в результате сокращения дроби. Итак, $\frac{2}{3}$ – это или $\frac{4}{6}$, или $\frac{6}{9}$, или $\frac{8}{12}$, или $\frac{10}{15}$. Несложно увидеть, что дробь $\frac{8}{12}$ можно получить в результате вычитания одного и того же числа 5 из числителя и знаменателя исходной дроби.

Другой способ решения – алгебраический. Обозначим искомое число через x.

Тогда имеет место уравнение: $\frac{13-x}{17-x} = \frac{2}{3}$.

Воспользовавшись основным свойством пропорции, получим:
$(13 - x)3 = 2(17 - x)$.

Раскроем скобки, затем приведём подобные члены и получим:
$39 - 3x = 34 - 2x$; $5 = x$.

В рамках пункта 11.7 или 11.10 можно предложить классу занимательную задачу, для решения которой понадобится не просто знание техники вычислений, а некоторая находчивость и сообразительность.

Задача

Найдите значения выражения:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{18 \cdot 19} + \frac{1}{19 \cdot 20}.$$

Возможно, понадобится такая подсказка:

$$\frac{1}{k \cdot (k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)},$$

воспользовавшись которой данное выражение из девятнадцати слагаемых можно будет легко свести к разности буквально двух чисел.

Относительно оригинальной является наша трактовка смешанных дробей, приведённая в пункте 11.8.

Мы собираемся купить булочки на 20 сомов.

Если булочка стоит 4 сома, то мы сумеем купить $\frac{20}{4}$ = 5 булочек, если 5 сомов – то $\frac{20}{5}$ = 4 булочки. Если же булочка стоит 6 сомов, то мы сумеем купить 3 булочки и получим 2 сома сдачи. Эту ситуацию записывают следующим образом: $\frac{20}{6} = 3 + \frac{2}{6}$.

В своё время математики договорились, что в таких ситуациях они будут пропускать знак плюс между целым положительным числом и обыкновенной дробью. Поэтому вместо $3 + \frac{2}{6}$ пишут $3\frac{2}{6}$ и называют это выражение **смешанным числом**. Число 3 в данном случае является целой частью смешанного числа, 2/6 – дробной частью. Дробная часть смешанного числа должна быть правильной дробью.

Например, если булочка стоит 7 сомов, то мы сумеем купить 2 булочки и получим 6 сомов сдачи: $\frac{20}{7} = 2\frac{6}{7}$.

Производя вычисления со смешанными числами, мы воспринимаем их как единое выражение. Например, выражение $5 - 2\frac{3}{17}$ означает $5 - (2 + \frac{3}{17})$; выражение $15 \cdot (1\frac{3}{11})$ означает $15 \cdot (1 + \frac{3}{11})$.

Ещё один пример, доказывающий полезность нашего подхода.

Задача

К каждому из 8 слагаемых добавили $2\frac{7}{8}$. На сколько увеличилась сумма?

Решение

Правильно интерпретируя смешанную дробь, легко получить правильный ответ: $8 \cdot 2 + 7 = 23$.

§ 12. Степени. Абсолютная и относительная погрешность

Рассказывая учащимся о степени, по всей видимости стоит обратить их внимание на удобство. Ведь можно записать, что $729 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$, но такая форма записи неудобна – придётся приложить некоторые усилия для того, чтобы убедиться в том, что имеет место произведение шести троек.

А если записать это в виде $729 = 3^6$, то всё сразу видно и понятно.

Нужно постараться **донести до школьников** мысль, что умелое использование степени и её свойств полезно. Как это сделать? Как всегда – используя должным образом подобранные примеры.

Например, предложите разделить 46656 на 2592. Затем предложите проверить, что $46656 = 3^6 \cdot 2^6$, а $2592 = 3^4 \cdot 2^5$, и, воспользовавшись свойствами степени, увидеть, что $46656 : 2592 = 3^2 \cdot 2 = 18$.

Как мы отмечали ранее, использование волшебных таблиц может существенно повысить интерес учащихся к материалу.

Исследовательское задание обязательно нужно предложить учащимся, а в случае, если они будут не в состоянии сразу сформулировать утверждение, стоит пополнить задание несколькими подобными волшебными таблицами.

Получается очень интересная закономерность, связывающая умножательные и слагательные таблицы, о которой говорится в параграфе А1.

Разговор о погрешностях можно начать с вопросов следующего типа: «Касым, чему равен твой вес?» Как бы он ни ответил, можно говорить, что он неправ. После небольшой, конечно, дружеской пикировки, можно объяснить, что Вы имеете в виду. Обычно ответ даётся в килограммах. Вы говорите, что имеется ещё некоторое количество граммов. После граммов можно говорить о милиграммах и так далее. После такого введения будет уместно начать обсуждать методы определения погрешностей.

При этом могут быть затронуты важные социальные проблемы. Например, повышении пенсии – у большинства есть близкие родственники-пенсионеры. Вопрос для обсуждения: повышение пенсии на 500 сомов или на 10%.

§ 13. Задачи на составление уравнений

Мы возвращаемся к теме «Задачи на составление уравнений». Понятно, что это не простое повторение пройденного материала.

Мы в очередной раз расширяем круг рассматриваемых проблем. На этот раз за счёт использования обыкновенных дробей.

Понимание этого обстоятельства помогает в расширении множества изучаемых задач. Можно брать сюжет задачи, рассмотренной, скажем, в 5 классе, и вместо некоторых натуральных или целых чисел взять обыкновенные дроби.

Например:

5 класс	**6 класс**
У Базарбая и Рысбая 1532 овцы. Сколько овец у Базарбая, если стадо Рысбая в три раза меньше его стада?	У Балтабая и Рысменди 1532 овцы. Сколько овец у Балтабая, если стадо Рысменди на две трети меньше его стада?

Прежде чем продвигаться дальше, необходимо уделить должное внимание одному важному аспекту, которому в процессе обучения редко придают подобающее значение. Речь пойдёт о том, чтобы учащиеся *не только решали готовые текстовые задачи на составление уравнений, но и сами учились их составлять*.

Навыки составления таких задач и процесс их решения важны по крайней мере по трём причинам.

Во-первых, способствуют развитию навыков моделирования различных реальных ситуаций. Другими словами, в таких случаях учащийся берёт уравнение не с потолка, то есть, пишет не просто хаотичный набор арифметических операций с числами и переменными, а сперва производит необходимые расчёты с какими-то выбранными значениями нескольких величин, получает числовой результат и *уже после этого* может создать даже не одно, а несколько вполне *осмысленных с житейской точки зрения уравнений*, принимая в полученном числовом равенстве то одну, то другую величину за неизвестную. В итоге появляется возможность сформулировать несколько задач, варьируя наборы известных данных и искомых величин.

Во-вторых, дают возможность повторять все тонкости арифметических операций с числовыми данными различных типов.

В-третьих, происходит повторение методов решения стандартных уравнений, причём повышается целеустремлённость в плане доведения процесса решения до конца, поскольку корни собственноручно составленных уравнений уже заведомо известны и учащийся ясно видит цель.

Важнейшим аспектом является следующее: какого рода задачи *сперва составить самостоятельно (а уже потом решить)* предложить учащимся? В пунктах 13.3–13.15 учебника мы рассматривали *процесс решения* задач некоторых видов. Теперь же стоит поговорить *о процессе составления* задач.

I. Задачи на покупку

Многие из них можно решить и без составления уравнений, но в целях закрепления навыков по решению уравнений рекомендуется прибегнуть к ним. Приведём условные обозначения и значения величин, участвующих в нижеследующих задачах 1–4.

Пусть C_1 и C_2 – цены одного килограмма первого и второго продуктов соответственно (например, в сомах), K_1 и K_2 – количество (в килограммах) купленных первого и второго продуктов соответственно, S_1 и S_2 – затраченные деньги (в сомах) на первый и второй продукты соответственно.

Тогда суммарные затраты равны $S = C_1K_1 + C_2K_2$ – это равенство (оно же и уравнение) и будет своего рода ориентиром для составления ряда задач, которые показаны ниже в табличном виде (но при этом не следует думать, что буквально все задачи на покупку сводятся к уравнению вида $S = C_1K_1 + C_2K_2$).

№ задач	Известны	Найти	Примечания
1	S, C_1, K_1, K_2	C_2	1. Не обязательно для каждой задачи придумывать свои числовые данные: можно использовать данные из задачи № 1 для всех остальных задач. 2. Желательно в качестве данных брать и десятичные, и обыкновенные, и смешанные дроби.
2	S, C_1, K_1, C_2	K_2	
3	S, K_1, C_2, K_2	C_1	
4	S, C_1, C_2, K_2	K_1	

Можно составить и другие задачи на основе этой таблицы. Например, в задаче № 1 можно вместо известных S, C_1, K_1, K_2 считать известными S, C_1, S_1, но тогда надо будет задать соотношение между K_1 и K_2. И таких задач можно придумать множество.

Задача. Куплено 10 альбомов по цене 30 сомов. Куплены также блокноты, их количество меньше количества купленных альбомов в $2\frac{1}{2}$ раза. Найдите цену одного блокнота, если суммарные затраты составили 396 сомов.

II. Задачи на встречное движение двух объектов

Предварительно надо объяснить классу следующее: пусть некоторый отрезок разбит на три части (не обязательно равные). Тогда длина каждой из трёх частей равна разности между длиной исходного отрезка и суммой длин двух других частей. Или, другими словами, сумма длин любых двух частей равна разности между длиной исходного отрезка и длиной третьей части.

Приведём условные обозначения и значения величин, участвующих в нижеследующих задачах 1–4. Пусть из пункта *A* в направлении пункта *B* выезжает всадник со скоростью v_1 *км/час*, а одновременно с ним из пункта *B* в направлении пункта *A* отправляется пешеход со скоростью v_2 *км/час*. Через *t* минут после начала движения всадник проедет расстояние (путь) $AC = v_1 \cdot \frac{t}{60}$ *км*, а пешеход пройдёт $BD = v_2 \cdot \frac{t}{60}$ *км*. Здесь подберём так, чтобы точки *A*, *C*, *D*, *B* располагались слева направо именно в таком порядке. Далее, зададим величину отрезка пути *CD*, который будет расстоянием между всадником и пешеходом через *t* минут после начала их движения. Тогда нетрудно подсчитать расстояние $AB = AC + CD + DB$. Или, переходя непосредственно к заданным числовым значениям, получаем равенство $v_1 \cdot \frac{t}{60} + CD + v_2 \cdot \frac{t}{60} = AB$.

Это равенство (оно же и уравнение) и будет ориентиром для составления ряда задач, которые ниже показаны в табличном виде (но при этом не следует думать, что буквально все задачи на встречное движение сводятся к уравнению вида $v_1 \cdot \frac{t}{60} + CD + v_2 \cdot \frac{t}{60} = AB$).

<table>
<tr><th>№ задач</th><th>Известны</th><th>Найти</th><th>Примечания</th></tr>
<tr><td>1</td><td>v_1, v_2, t, AB</td><td>CD</td><td rowspan="4">1. Не обязательно для каждой задачи придумывать свои числовые данные: можно использовать данные из задачи № 1 для всех остальных задач.
2. Желательно в качестве данных брать и десятичные, и обыкновенные, и смешанные дроби.</td></tr>
<tr><td>2</td><td>v_1, v_2, AB, CD</td><td>t</td></tr>
<tr><td>3</td><td>v_1, t, AB, CD</td><td>v_2</td></tr>
<tr><td>4</td><td>v_2, t, AB, CD</td><td>v_1</td></tr>
</table>

Задача 1. Расстояние между пунктами *A* и *B* равно 5 *км*. Из пункта *A* в сторону пункта *B* выехал всадник со скоростью $13\frac{2}{5}$ *км/час*. Одновременно с ним из пункта *B* в сторону пункта *A* вышел пешеход со скоростью $4\frac{7}{10}$ *км/час*. Через сколько времени расстояние между ними будет $\frac{19}{40}$ *км*? Ответ: $\frac{1}{4}$ часа.

Задача 2. Расстояние между пунктами *A* и *B* равно 7 *км*. Из пункта *A* в сторону пункта *B* выехал всадник со скоростью $13\frac{1}{10}$ *км/час*. Одновременно с ним из пункта *B* в сторону пункта *A* вышел пешеход. Через после начала движения расстояние между ними было $\frac{171}{50}$ *км*. С какой скоростью шёл пешеход? Ответ: $4\frac{4}{5}$ *км/час*.

III. Задачи на движение катера по реке

Необходимо напомнить учащимся, что при движении катера по течению реки его общая скорость равна сумме собственной скорости катера (то есть, скорости катера в стоячей воде) и скорости течения реки. А при движении катера против течения реки его общая скорость равна разности между собственной скоростью катера и скоростью течения реки. Приведём условные обозначения и значения величин, участвующих в нижеследующих задачах 1–4. Пусть $v_к$ – собственная скорость катера, $v_р$ – скорость течения реки, t_1 – время движения катера по течению реки, t_2 – время движения катера против течения реки. Тогда можно подсчитать суммарный пройденный путь *S*:

$S = (v_к + v_р) \cdot t_1 + (v_к - v_р) \cdot t_2$

Это равенство (оно же и уравнение) и будет основой для составления ряда задач, которые ниже показаны в табличном виде (но при этом не следует думать, что буквально все задачи на движение по реке сводятся к уравнению вида $S = (v_к + v_р) \cdot t_1 + (v_к - v_р) \cdot t_2$).

№ задач	Известны	Найти	Примечания
1	S, $v_к$, $v_р$, t_1	t_2	1. Не обязательно для каждой задачи придумывать свои числовые данные: можно использовать данные из задачи № 1 для всех остальных задач. 2. Желательно в качестве данных брать и десятичные, и обыкновенные, и смешанные дроби.
2	S, $v_к$, $v_р$, t_2	t_1	
3	S, $v_к$, t_1, t_2	$v_р$	
4	S, $v_р$, t_1, t_2	$v_к$	

Задача 1. Собственная скорость катера 20 *км/час*, скорость течения реки 4 *км/час*. Катер плыл по течению реки $\frac{1}{4}$ часа, а затем некоторое время шёл против течения. Всего он проплыл $\frac{122}{15}$ *км*. Сколько времени катер шёл против течения реки? Ответ: $\frac{2}{15}$ часа.

Задача 2. Собственная скорость катера 21 *км/час*, скорость течения реки 5 *км/час*. Катер плыл некоторое время по течению реки, а затем $\frac{1}{6}$ часа против течения. Всего он проплыл $\frac{157}{15}$ *км*. Сколько времени катер шёл по течению реки? Ответ: $\frac{3}{10}$ часа.

Задача 3. Катер прошёл $3\frac{4}{5}$ *км* по течению реки за $\frac{1}{5}$ часа и $1\frac{13}{15}$ *км* против течения за $\frac{2}{15}$ часа. Найти собственную скорость катера и скорость течения реки.

Ответ: $v_к = 16\frac{1}{2}$ *км/час*, $v_р = 2\frac{1}{2}$ *км/час*.

Особый интерес представляют задачи на доказательство, то есть выкладки с буквенными величинами. Приведём некоторые из них, при этом не решая их.

Задача 4. Из пункта *A* вниз по течению реки (для определённости пусть на рисунке это будет слева направо, а скорость течения реки примем равной $v_р$) в направлении пункта *B* отправлено бревно, а одновременно с ним из пункта *B* в направлении пункта *A* вышел катер с собственной скоростью $v_к$. Катер и бревно встретились ровно посередине пути *AB*. Доказать, что в этом случае

$$\frac{v_К}{v_Р} = 2. \qquad (1)$$

Примечание к задаче 4

Так как в условии задачи есть слово «доказать», то можем эту задачу назвать задачей на доказательство. С другой стороны, если в условии вместо «доказать, что в этом случае $\frac{v_К}{v_Р} = 2$» взять «найти $\frac{v_К}{v_Р}$», то получается задача чисто вычислительного характера. Как бы там ни было, для решения задачи нужно будет составлять уравнение, но отличное от вышерассмотренного уравнения вида

$S = (v_к + v_р) \cdot t_1 + (v_к - v_р) \cdot t_2$.

Более того, учащимся надо сообразить, что решение данной задачи (то есть искомое отношение $\frac{v_К}{v_Р}$) не зависит от конкретных значений величин S, t_1 и t_2.

Задача 5. Пусть из пункта *A* вниз по течению реки (скорость её течения $v_р$) в направлении пункта *B* вышел первый катер с собственной скоростью v_1, а одновременно с ним из пункта *B* в направлении пункта *A* вышел второй катер с собственной скоростью v_2. Доказать, что для того, чтобы эти два катера встретились ровно посередине пути AB (обозначим эту середину точкой C), необходимо выполнение соотношения

$$v_2 - v_1 = 2v_p. \quad (2)$$

Предоставив классу возможность доказать равенство (2), мы лишь проведём некоторые важные логические рассуждения, чтобы затем пояснить их учащимся. Из соотношения (2) видно,что $v_2 > v_1$ – и интуитивно это понятно: ведь первый катер идёт *по течению*, а второй – *против*, поэтому, если будет $v_2 = v_1$ или, тем более, если $v_2 < v_1$, то встреча этих двух катеров никак не может произойти посреди отрезка AB, а случится только правее точки C то есть ближе к точке B.

Примечание 1 к задаче 5

Если в этой задаче вместо первого катера опять взять бревно, то получим $v_1 = 0$. Затем, переобозначив скорость единственного остающегося катера (v_2) просто через $v_к$, мы из (2) имеем: $v_к = 2v_р$, или $\frac{v_К}{v_Р} = 2$, то есть вновь ожидаемо приходим к равенству (1) из задачи 4.

Далее из (2) получаем $\frac{v_2 - v_1}{v_P} = 2$. Итак, равенство $\frac{v_К}{v_Р} = 2$ из задачи 4 есть **частный случай** равенства $\frac{v_2 - v_1}{v_P} = 2$ из задачи 5.

Примечание 2 к задаче 5

Задача преподавателя состоит в том, чтобы побудить учащихся рассуждать дальше. Например, в зависимости от того, насколько собственная скорость одного катера больше или меньше собственной скорости другого, будет меняться и положение точки их встречи (обозначим её буквой D).

Другими словами, точка D может оказываться в той или иной мере и левее, и правее точки C, под которой мы по-прежнему подразумеваем середину отрезка AB. Значит, можно, в числе прочих, ставить задачи следующего типа: во сколько раз AD больше или меньше отрезка BD? Задав некоторое конкретное значение $k = \frac{AD}{BD}$ можно получать различные однотипные задачи. Важно уметь выразить через соответствующие данные.

При рассмотрении задач несколько иного плана (то есть при других известных элементах) необходимо напомнить учащимся, что, кроме равенства $k = \frac{AD}{BD}$, есть ещё равенство $AD + BD = AB$.

IV. Задачи на прямоугольники

Даже такие простейшие фигуры, каковыми являются прямоугольники, дают широкие возможности для постановки задач (см., например, § 11 данного пособия). Но там речь шла *о двух* прямоугольниках. В то же время можно обойтись и *одним* прямоугольником. Для составления задач с уравнением достаточно самим взять определённые значения длины и ширины прямоугольника, подсчитать периметр. А далее в качестве исходных (то есть, известных) данных считать этот периметр и то или иное соотношение между сторонами прямоугольника. Например, пусть мы взяли $a = 10$ *см*, $b = 6$ *см*, тогда периметр $P = 32$ *см*. Теперь остаётся только придумать задачи. Классу достаточно показать следующие две задачи, основанные на одних и тех же данных, но в чисто арифметическом плане выглядящие несколько по-разному.

Задача 1. Длина больше ширины на 4 *см*. Найти стороны и площадь прямоугольника.

Примечание. Такие задачи можно решать и с помощью уравнений, и чисто арифметическим методом, то есть без уравнений.

Задача 2. Длина больше ширины в $1\frac{2}{3}$ раза. Найти стороны и площадь прямоугольника.

V. Задачи на треугольники

На первый взгляд, треугольники – более простые фигуры по сравнению с прямоугольниками, поскольку у первых – по три стороны, у вторых – по четыре. Но учтём, что у всякого прямоугольника по две пары равных сторон и к тому же все четыре угла – прямые. А у треугольников в общем случае различны все три стороны и, соответственно, все три угла.

Но есть и ещё один очень важный момент, о котором в обязательном порядке надо информировать обучаемых. Речь идёт о том, что, в отличие от прямоугольника, для которого в качестве длин его сторон (основания и высоты) может служить в буквальном смысле *любая пара чисел*, для треугольника *дело обстоит не так просто*, то есть не каждая тройка чисел может служить значениями длин сторон треугольника. Надо учитывать следующее: длина любой стороны треугольника (в том числе и самой длинной) должна быть строго меньше суммы длин двух других сторон. Обозначив стороны треугольника a, b и c, имеем требования:

$$c < a + b, \quad a < b + c, \quad b < a + c. \tag{1}$$

Например, возьмём $a = 8$ *см*, $b = 10$ *см*. При выборе значения длины стороны учтём требование $c < a + b = 18$ *см*.

Здесь возможны следующие случаи.

1) $c < a$. В качестве значения c подходит *не любое значение*, меньшее, чем длина стороны a. Действительно, взяв $c = 1$, получим: $a + c = 8 + 1 = 9 < b = 10$, что недопустимо ввиду (1). В то же время можно брать $c = 2{,}1$, так как тогда $a + c = 8 + 2{,}1 = 10{,}1 > b = 10$, а это согласуется с требованиями (1).

2) $a < c < b$. В этом случае годится любое значение c, поскольку будут выполняться все требования (1).

3) $c > b$. Надо выбрать значение c так, чтобы не нарушить требование $c < a + b$.

Особый интерес представляет выбор значений длин сторон *равнобедренных треугольников*. Возьмём $a = b = 8$. Значит, должно быть $c < 16$.

Здесь имеем два случая.

1) Две равные стороны *больше третьей* (сторону равнобедренного треугольника, отличную от остальных двух равных сторон, принято называть *основанием равнобедренного треугольника*). Тогда вместо неравенства $c < 16$ получаем ещё более сильное требование: $c < 8$. С *учётом этого требования* можно, не опасаясь, *брать любое значение c*.

Можно предложить учащимся доказать, что если две равные стороны равнобедренного треугольника больше третьей стороны, то этот треугольник является *только остроугольным*.

2) Две равные стороны *меньше третьей*. Тогда берём $8 < c < 16$.

Необходимо, чтобы учащиеся доказали, что в этом случае равнобедренный треугольник может быть и остроугольным, и тупоугольным, и прямоугольным.

Теперь покажем, как составить задачи на треугольники по принципу, аналогичному тому, что применялся в задачах на прямоугольники (см. пункт IV).

Сперва сами задаём стороны треугольника: $a = 10$ *см*, $b = 12$ *см*, $c = 16$ *см*. Тогда периметр треугольника равен 38 см. Теперь формулируем разные задачи, задавая соотношения между теми или иными сторонами и в виде «на столько-то см больше или меньше», и в виде «во столько-то раз больше или меньше». Причём по совокупности всех задач можно по-разному комбинировать, то есть брать различные пары соотношений («на столько-то…» и «во столько-то раз…») между сторонами, необходимые для составления задач.

Задача 1. Периметр треугольника равен 38 *см*. Первая сторона меньше второй на 2 *см*, а третья больше второй на 4 *см*. Найти стороны треугольника.

Задача 2. Периметр треугольника равен 38 *см*. Первая сторона меньше второй в $1\frac{1}{5}$ раза, а третья больше второй в $1\frac{1}{3}$ раза. Найти стороны треугольника.

Задача 3. Периметр треугольника равен 38 *см*. Первая сторона меньше второй на 2 *см*, а третья больше второй в $1\frac{1}{3}$ раза. Найти стороны треугольника.

Задача 4. Периметр треугольника равен 38 *см*. Первая сторона меньше второй в $1\frac{1}{5}$ раза, а третья больше второй на 4 *см*. Найти стороны треугольника.

Наконец, целесообразно предложить задачу и на равнобедренный треугольник:

Задача

Периметр равнобедренного треугольника равен $\frac{91}{12}$. Одна сторона больше каждой из двух других сторон на $1\frac{1}{12}$. Найдите все стороны треугольника.

В заключение можем порекомендовать следующее. Было бы полезно научить шестиклассников тем или иным образом классифицировать величины, фигурирующие в рамках задач. Например, величины в рассмотренных задачах можно подразделить на:

- «внутренние» («низовые», то есть, наиболее «низкого, элементарного, входящего» уровня);
- «промежуточные» (то есть, чуть более «высокого» уровня);
- «внешние» (то есть, самого «высокого, выходного» уровня).

По такому условному подразделению величины из рассмотренных задач можно проклассифицировать следующим образом:

Задачи на	Внутренние величины	Промежуточные величины	Внешние величины
I. Покупку	- цены разных товаров; - их количество	затраты на каждый товар в отдельности	- суммарное количество всех товаров; - суммарные затраты

Задачи на	Внутренние величины	Промежуточные величины	Внешние величины
II. Встречное движе-ние двух объектов	- скорости каждого объекта; - время движения объектов до какого-то момента; - расстояние между объектами в какой-то момент времени	путь, пройденный каждым объектом к какому-то моменту времени	расстояние между пунктами, из которых начинают движение объекты
III. Движение катера по реке	- скорости катеров и течения реки; - время движения (в отдельности) по и против течения реки	расстояния, пройденные разными объектами по или против течения реки	- суммарное время движения и суммарный пройденный путь по и против течения реки (для случая одного объекта); - расстояние между пунктами, из которых выходят навстре-чу друг другу два объекта
IV. Прямо-угольники	длины сторон прямоугольника	– полупериметр; – заданные соотношения между сторонами прямоугольника	- периметр; - площадь
V. Треугольники	длины сторон треугольника	заданные соотношения между сторонами треугольника	периметр

Обыкновенные дроби позволяют формулировать новые задачи на определение количества элементов множества.

Задача

В классе 32 учащихся. Из них 18 девочек. Спортом занимаются 20, а число мальчиков-спортсменов составляет три четвёртых числа девочек, не занимающихся спортом. Сколько мальчиков не занимаются спортом?

Решение

Составим таблицу, обозначив через x количество девочек, не занимающихся спортом, D – множество девочек, G – множество учащихся, занимающихся спортом. Тогда $\overline{D}$ – множество мальчиков, $\overline{G}$ – множество тех, кто не занимается спортом $\frac{3}{4}x$.

	G	$\overline{G}$	
D		x	20
$\overline{D}$	$\frac{3}{4}x$		
	18		32

На первом шаге можно заполнить 4-ую строку и четвёртый столбец.

	G	$\overline{G}$	
D		x	20
$\overline{D}$	$\frac{3}{4}x$		***12***
	18	***14***	32

Далее, ячейку на пересечении 2-ой строки и 2-го столбца можно заполнить 2-мя способами: по строке и по столбцу.

По строке: 18 − (3/4)x; по столбцу 20 − x.

	G	$\overline{G}$	
D	$\boldsymbol{20 - x}$ и $\boldsymbol{18 - \frac{3}{4}x}$	x	20
$\overline{D}$	$\frac{3}{4}x$		**12**
	18	**14**	32

Следовательно, имеет место уравнение: 20 − x = 18 − (3/4)x.

Его решение x = 8. Тогда

	G	$\overline{G}$	
D	***20 − 8*** и ***18 − 6***	***8***	20
$\overline{D}$	***6***		**12**
	18	**14**	32

Закончим заполнять таблицу и получим ответ на поставленный вопрос.

	G	$\overline{G}$	
D	***12***	**8**	20
$\overline{D}$	**6**	***6***	**12**
	18	**14**	32

В этом классе только шесть мальчиков не занимаются спортом.

Просматривая задачи этого параграфа, мы обнаружили, что не включили задачи на волшебную таблицу. Предложите своим учащимся сочинить такие задачи. Уверяем вас, что это совершенно не сложно. Тем более, что они знают главный секрет волшебных таблиц.

§ 14. Средние значения: среднее арифметическое. Мода. Медиана

Если провести исследование с целью выяснить, какой статистический коэффициент чаще всего используется, то почти наверняка на первом месте будет *среднее арифметическое значение*. Оно так привычно, что часто даже слово *арифметическое* пропускают и просто говорят *среднее значение*. Поэтому не удивительно, что в этом параграфе основное внимание уделено этой величине. В то же время, в «серьёзной» статистике, говоря о средних величинах, рассматривают не только среднее арифметическое, но и такие показатели, как мода и медиана. Как правило, их вычислить проще, чем среднее арифметическое, но к ним надо привыкнуть, попрактиковаться в их вычислении.

Говоря о типичных ошибках, которые допускают школьники при определении среднего арифметического, стоит ещё раз остановиться на определении средней скорости.

Итак, **средняя скорость – это отношение всего пути ко всему затраченному времени**.

Если автомобиль первый час ехал со скоростью 64 *км/час*, второй час – со скоростью 80 *км/час*, то его средняя скорость – 72 *км/час*, потому что за два часа он преодолел 64 + 80 = 144 *км*.

В то же время, если автомобиль проехал 72 *км* со скоростью 80 *км/час*, а вторые 72 *км* со скоростью 64 *км/час*, то на преодоление первых 72 *км* он затратил 72/80 = 0,9 часа. На вторые 72 *км* он затратил 72 : 64 = 1,125 часа.

Поэтому средняя скорость в этом случае равна
(72 + 72) : (0,9 + 1,125) = 71,(1) *км/час*.

Рассмотрим ещё одну такую задачу.

Задача

От первой остановки до второй автобус прошёл со скоростью 80 *км/ч*, от второй до третьей – со скоростью 50 *км/ч*, от третьей до четвёртой – со скоростью 40 *км/ч*. Какова средняя скорость движения автобуса, если расстояния между остановками одинаковые?

Решение

Обозначив расстояние между двумя остановками через x, получим, что на дорогу от первой остановки до второй автобус затратил $x : 80$ *ч*, от второй до третьей – $x : 50$ *ч*, от третьей до четвёртой $x : 40$ *ч*. Значит, вся дорога заняла $x : 80 + x : 50 + x : 40 = 23x : 400$ часов.

Так как весь путь в этом случае равен $3x$, средняя скорость равна $3x : (23x : 400) = 400 \cdot 3x/23x = 52{,}174$ *км/ч*.

В процессе обсуждения учащиеся должны понять, что нельзя ориентироваться только на среднее арифметическое значение. Тем самым мы готовим их к введению индексов, измеряющих величину отклонения статистических данных от средних значений, таких, как размах, дисперсия…

§ 15. Организация данных

Как уже было отмечено, в новом курсе школьной математики значительную роль будет играть статистика. Статистика начинается со сбора данных. Затем эти данные нужно должным образом привести в порядок, обработать.

Для этого используются частотные таблицы. Результаты, отображённые в них, обычно визуализируют, используя различные виды диаграмм, полигоны.

Преимущество этой темы – её практическая направленность. При усвоении материала будет полезно провести исследовательскую работу. Её содержание может быть таким: рассмотреть множество чисел, элементами которого будут числа, выражающие рост учеников данного класса. На основе этих данных можно составить частотную таблицу, а затем построить соответствующие диаграмму и полигон.

Задача

Постройте частотную таблицу для результатов теста в 5 классе: 30, 40, 20, 30, 10, 40, 50, 20, 10, 40, 50, 30.

Решение

Частота показывает, сколько человек получили определённый результат. Например, 2 человека получили по 10 баллов. Запишем все результаты в таблицу.

Результат теста	10	20	30	40	50
Частота	2	2	3	3	2

§ 16. Окружность. Круг. Сектор

Это очень важная тема, имеющая громадное количество приложений. С одной стороны, это очень просто — каждый знает, что такое круг. С другой стороны, эта тема сложная — нам впервые приходится иметь дело с иррациональным числом «пи». Поэтому, если принимать во внимание только логику развития математических понятий, то, возможно, эту тему следовало бы изучать в более старших классах. С другой стороны, нужно учитывать межпредметные связи и принимать во внимание потребности физики, географии, … .

По нашему мнению, для успешного овладения этой темой, как и любыми другими, важно пробудить интерес учащихся. Благо, при изучении темы можно использовать громадное количество задач из окружающей жизни. Например, можно предложить учащимся с помощью нитки измерить длину окружности пятисомовой монеты, измерить диаметр этой монеты, а затем найти отношение длины окружности к диаметру. После, взять числа выражающие это отношение, вычисленные несколькими учащимися независимо друг от друга. Среднее арифметическое полученных значений должно быть близко к значению числа «пи».

Затем, приложить пятисомовую монету к листу бумаги в клетку и обвести карандашом. После чего вычислить примерное значение площади, используя клетки и части клеток, попавшие во внутрь полученной окружности.

При обсуждении сектора и дуги важно довести до учащихся мысль о том, что имеет место пропорция. Поэтому площадь сектора есть такая же часть площади круга, какой частью является величина центрального круга от 360°. То же самое можно говорить про длину дуги и длину окружности.

МАТЕРИАЛЫ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

А1. Волшебная таблица

Мы продолжаем работать с волшебными таблицами. Поэтому желательно повторить соответствующий материал, изложенный в 5 классе. Иначе может повториться конфуз, приключившийся с одной из коллег. Рецензируя учебник, она написала, что числа в таблицах расположены беспорядочно. Как уже говорилось ранее, волшебные таблицы позволяют отрабатывать вычислительные навыки. Но, что гораздо важнее, материал данного параграфа имеет глубокий философский смысл. Раскрывая секреты составления волшебных таблиц, мы иллюстрируем причинно-следственные связи между явлениями. Конечно, для оживления ситуации можно произносить разные волшебные заклинания, типа «сим-салабим» и ему подобные, но должно быть понятно, что дело не в них. В данном случае выясняется, что суть секрета волшебных таблиц заключается в известных нам с первого класса правилах:

- **При перемене мест слагаемых сумма не меняется.**
- **При перемене мест сомножителей произведение не меняется.**

Используя знание секрета, школьники могут составлять волшебные таблицы с любыми волшебными числами. В качестве образующих могут выступать самые разные числа: натуральные, целые, десятичные дроби, обыкновенные дроби.

Поэтому рекомендуем уделить побольше времени составлению волшебных таблиц. Тем более, как уже говорилось ранее, процесс определения волшебного числа соответствует алгоритму вычисления значения определителя матрицы.

Также отметим, что использование образующих помогает усвоить понятие «степени свободы», которое присутствует в современных курсах статистики.

Волшебные таблицы дают большие возможности для проведения воспитательной работы. Например, каждый шестиклассник может составить свою ко Дню независимости. Также рекомендуем дать учащимся задание составить таблицы, в которых волшебным числом является день рождения бабушки, дедушки, прабабушки...

А2. Криптография

Содержание этого параграфа не входит в основную программу школьного курса математики, но очень заинтересует Ваших учеников.

Предполагается, что он будет изучаться, только если останется время. Хочется воскликнуть: найдите время для этого материала! Несколько наших коллег, которые работали с этим учебником, сообщили, что их детям больше всего понравилась криптография и задачи на сообразительность. Кроме того, будет нелишне сообщить, что специалисты по защите информации, а туда ведёт дорога от параграфа «Криптография», в настоящее время находятся в числе самых востребованных и высокооплачиваемых. Учащиеся с удовольствием шифруют различные сообщения, пишут друг другу секретные записки. Дайте им возможность поиграть в разведчиков, секретных агентов.

А3. Тестовые задания на внимание, логику, сообразительность

При проверке знаний часто используют задачи множественного выбора, в которых правильным ответом является один из нескольких предложенных. В этом параграфе мы предлагаем 40 таких задач. Их можно решать как в течение учебного года, так и на каникулах.

1) Вычислите $140(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{3}{7})$.

a) 5   b) −1   c) 3   d) 7   e) 4/7   f) 5/28

Решение

Ответ получится очень просто, если заметить, что в знаменателях стоят делители числа 140. Поэтому, раскрыв скобки, легко получим ответ:

$$140(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{3}{7}) = 140 \cdot \frac{1}{4} + 140 \cdot \frac{1}{5} - 140 \cdot \frac{3}{7} = 35 + 28 - 60 = 3$$

2) Вычислите $a - b$, зная, что $\begin{cases} a + b = 7 \\ a + 2b = 9 \end{cases}$

a) 12   b) 2   c) 3   d) 13   e) 4   f) 5

Решение

Выразив a из 1-го уравнения: $a = 7 - b$ и подставив во 2-ое, получим: $7 - b + 2b = 9$. Тогда $b = 2$; $a = 5$.

3) Вычислите y, зная, что $\begin{cases} x + y = z - y \\ x - y - z = 9 \end{cases}$

a) −2 b) 2 c) −3 d) 13 e) 4 f) −5

Решение

Из 1-го уравнения: $x - z = -2y$, из 2-го: $x - z = 9 + y$.

Следовательно, $-2y = 9 + y$; $-3y = 9$; $y = -3$.

4) Выражение $2x - [x + (x + y) - (x - 2y)]$ равно:

a) $-x + 2y$ b) $x + 3y$ c) $x - 3y$ d) $2x - y$ e) $2x + 3y$ f) $x - y$

Решение

Раскрыв скобки и приведя подобные члены, получим: $x - 3y$.

5) У скольких двузначных натуральных чисел сумма цифр равна пяти?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5 f) 6

Решение

Один из способов решения – просто перечислить соответствующие числа: 50; 41; 32; 23; 14.

6) У скольких двузначных натуральных чисел сумма цифр, умноженная на 4, равна этому числу?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5 f) 6

Решение

Обозначив первую и вторую цифры двузначного натурального числа через x и y соответственно, получим уравнение $10x + y = 4(x + y)$. Отсюда: $6x = 3y$; $y = 2x$. Итак, выяснилось, что цифра единиц должна быть в два раза больше числа десятков. Следовательно, условиям задачи удовлетворяют числа: 12; 24; 36; 48.

7) Если a, b, c – последовательные натуральные числа,
то $(a - b + 2)(a - c - 1)(c - a)$ равно:

a) −2 b) 2 c) −3 d) −6 e) 4 f) −5

Решение

Так как a, b, c – последовательные натуральные числа, $b = a + 1$; $c = a + 2$.

Тогда
$(a - b + 2)(a - c - 1)(c - a) =$
$= (a - (a + 1) + 2)(a - (a + 2) - 1)((a + 2) - a) = (1)(-3)(2) = -6.$

8) Если x и y – целые числа и $3x + 4y = 25$, то можно утверждать, что I. x – нечётное число; II. y – чётное число; III. $x \cdot y > 0$.

a) Верно только I.
b) Верно только II.
c) Верно только III.
d) Верно только I и II.
e) Верно только I и III.
f) Верно только II и III.

Решение

Данное задание требует тщательного анализа, поскольку оно из разряда весьма редких. Но не в связи с тематикой элементов данных, а в силу постановки условия, где перечисляются *предполагаемые* (то есть, не обязательно верные) и при этом *частичные* ответы в виде утверждений I, II, III, из определённой комбинации которых нужно составить единственно верный целостный ответ (один из вариантов a)–f)). И сам ход решения задач с такой структурой условия специфичен ввиду необходимости увязывания вариантов ответов с утверждениями I, II, III.

Необходимо объяснить учащимся понятия «верное и ложное утверждения». Например, утверждение I из данной задачи будет верным, если оно выполняется всегда, то есть, если x – нечётное число при любом числе y. Если же при каком-то y число x окажется чётным, то утверждение I будет ложным.

Так как сумма $3x + 4y$ является нечётным числом по условию, а число $4y$ чётное при любом y ввиду чётности множителя 4, то число $3x$ нечётное. Тогда число x должно быть нечётным независимо от y. Эти выкладки основаны на свойствах чётных и нечётных чисел (см. стр. 97 учебника). Итак, ясно, что утверждение I верно при всяком y, то есть всегда. Значит, из вариантов ответов надо вычеркнуть те, в которых утверждение I не входит в число верных. То есть сразу отпадают варианты b), c), f) – даже если бы утверждения II и III всегда были бы верными. Остаются варианты a), d), e).

Вариант d) отпадает *ввиду ложности* утверждения II, так как данное равенство $3x + 4y = 25$ имеет место *необязательно при чётном* y, оно получается *и при нечётном*, например: $y = -5$, если взять $x = 15$.

Вариант e) отпадает *ввиду ложности* утверждения III, так как данное равенство $3x + 4y = 25$ имеет место *не обязательно при* $x \cdot y > 0$:

например, оно получается *и при* $x \cdot y < 0$, если взять те же $x = 15$ и $y = -5$.

Остаётся вариант а) – это правильный ответ, так как до этого мы выявили верность утверждения I и ложность утверждений II и III.

9) Если $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 1776$, то сумма цифр a, b, c равна:

a) 16 b) 12 c) 23 d) 14 e) 15 f) 26

Решение

Значение записи $\overline{abc}$ расшифровывается в п. 7.1 учебника.

Так как

$\overline{abc} = 100a + 10b + c$; $\overline{bca} = 100b + 10c + a$; $\overline{cab} = 100c + 10a + b$,

получаем, что

$\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = 1776 = 100(a + b + c) + 10(a + b + c) + (a + b + c)$.

Следовательно, $111(a + b + c) = 1776$; $a + b + c = 16$.

10) Если сумма всех трёхзначных чисел, составленных с использованием каждой из цифр a, b, c, равна 1554, то чему равна сумма этих цифр?

a) 9 b) 8 c) 7 d) 6 e) 5 f) 4

Решение

Таких чисел шесть: $\overline{abc}$; $\overline{acb}$; $\overline{bca}$; $\overline{bac}$; $\overline{cab}$; $\overline{cba}$. Поэтому, используя десятичное представление трёхзначных чисел (смотрите предыдущую задачу), получим

$\overline{abc} + \overline{acb} + \overline{bca} + \overline{bac} + \overline{cab} + \overline{cba} =$

$= 200(a + b + c) + 20(a + b + c) + 2(a + b + c)$.

Следовательно, $222(a + b + c) = 1554 = > a + b + c = 7$.

11) Товар, который стоил $8p/7$ сомов, после скидки продали за p сомов. Чему равен процент скидки?

a) 16 b) 12,5 c) 23 d) 14,5 e) 15 f) 26,5

Решение

О понятии «процент» говорится в п. 4.11 учебника.

Так как размер скидки равен $8p/7 - p = p/7$ сомов, процент скидки равен $(p/7)/(8p/7) = 1/8 = 0{,}125 = 12{,}5\%$.

12) Стаканчик йогурта весил 250 *г*. После того как выпили четверть йогурта, стаканчик весит 195 *г*. Каков вес пустого стаканчика?

a) 26 b) 15 c) 25 d) 45 e) 50 f) 30

Решение

Обозначив вес пустого стаканчика через x, вес йогурта – через y, получим систему $\begin{cases} x + y = 250 \\ x + 0,75y = 195 \end{cases}$

Решение этой системы: $x = 30$, $y = 220$.

13) Уля планировала продать 60 футболок по цене 20 лир. Однако, выяснилось, что 12 футболок имеют дефект, и их продали по 12 лир. По какой цене были проданы оставшиеся футболки, если в итоге Уля получила изначально запланированную выручку?

a) 26 b) 22,5 c) 23 d) 24,5 e) 25 f) 22

Решение

Обозначив искомую цену через p, получим уравнение:
$60 \cdot 20 = (60 - 12)p + 12 \cdot 12$.
Отсюда следует: $48p = 1200 - 144$; $p = 22$.

14) Бракованная линейка при измерении даёт результат на 5% меньше истинной длины. С помощью этой линейки определили площадь квадрата. На сколько процентов полученный результат меньше истинного?

a) 19 b) 8,25 c) 7,75 d) 9,75 e) 25 f) 10

Решение

Если площадь квадрата $a \cdot a$, то бракованная линейка даст результат $0,95a \cdot 0,95a = 0,9025a \cdot a$.

Следовательно, полученный результат меньше истинного на $1 - 0,9025 = 0,0975 = 9,75\%$.

15) На четырёх полках имеются 16, 20, 23, 25 книг соответственно. Какое наименьшее число книг нужно переставить, чтобы на каждой полке было одинаковое число книг?

a) 9 b) 8 c) 7 d) 6 e) 5 f) 4

Решение

Для того чтобы на каждой полке было одинаковое число книг, на каждой полке должно быть: $(16 + 20 + 23 + 25)/4 = 21$. Следовательно, на первую полку нужно поставить ещё 5 книг, на вторую – 1. Всего $5 + 1 = 6$ книг.

16) Длина прямоугольной крыши 15 *м*, периметр – 46 *м*. Сколько весит снег на крыше, если снег, покрывающий 5 *м*², весит 60 *кг*?

a) 1980 b) 1280 c) 1740 d) 1600 e) 1950 f) 1440

Решение

Ширина крыши равна $46/2 - 15 = 8\,м$. Площадь крыши: $15 \cdot 8 = 120\,м^2$. Так как на каждом $м^2$ лежит $60/5 = 12\,кг$ снега, на крыше лежит $12 \cdot 120 = 1440\,кг$.

17) Некоторую работу за 15 дней могут выполнить 8 работников, работая по 8 часов в день. За сколько дней выполнят эту работу 12 работников, работая по 5 часов в день?

a) 19 b) 18 c) 17 d) 16 e) 15 f) 14

Решение

Обозначив искомое число через t, получим уравнение $15 \cdot 8 \cdot 8 = 12 \cdot 5t$. Отсюда следует: $60t = 960$; $t = 16$.

18) В 9 пакетах находится 60 жвачек. Известно, что в одних пакетах имеются пять жвачек, в других – десять. В скольких пакетах десять жвачек?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5 f) 6

Решение

Обозначив число маленьких пакетов через x, больших – через y, получим систему $\begin{cases} x + y = 9 \\ 5x + 10y = 60 \end{cases}$

Решение этой системы: $x = 6$, $y = 3$.

Ответ: в трёх пакетах.

19) После того как Гульнара обменяла 60 баранов на 15 коров, рыночная стоимость её стада увеличилась на 3000 лир. Какова рыночная стоимость коровы, если рыночная стоимость барана 750 лир?

a) 3516 b) 3200 c) 3500 d) 3140 e) 3150 f) 3000

Решение

Обозначив стоимость коровы через k, получим уравнение:

$15k - 60 \cdot 750 = 3000$.

Отсюда следует: $15k = 48000$; $k = 3200$.

20) Дерево за 4 года вырастает на 20%. Какой была высота этого дерева в 2002 году, если в 2014 она была $2{,}592\,м$?

a) 1,9 b) 1,8 c) 1,7 d) 1,6 e) 1,5 f) 1,4

Решение

Обозначим начальную высоту дерева через x (в метрах). С 2002 по 2014 было три четырёхгодичных периода. Тогда к концу только первого периода высота дерева увеличится на 20% по отношению к начальной высоте x. Но к концу каждого следующего периода увеличение на 20% происходит по отношению *к высоте дерева на конец предыдущего периода*, а не по отношению *к начальной высоте x*.

В таблице приводится расчёт высоты дерева (h) на конец каждого из трёх периодов.

2002–2006	**2006–2010**	**2010–2014**
$h = x + 0{,}2x = 1{,}2x$	$h = 1{,}2x + 0{,}2(1{,}2x) = 1{,}44x$	$h = 1{,}44x + 0{,}2(1{,}44x) = 1{,}728x$

В итоге имеем уравнение $1{,}728x = 2{,}592$, из которого следует $x = 2{,}592/1{,}728 = 1{,}5$ *м*.

Ответ: высота дерева в 2002 году составляла 1,5 метра.

21) Там, где Эсен делает 2 шага, Элиза делает 3 шага. Сделав по 50 шагов из одной точки и в одном направлении, они оказались на расстоянии 10 метров друг от друга. Какова длина шага Эсена?

a) 0,9 b) 0,8 c) 0,7 d) 0,6 e) 0,5 f) 0,4

Решение

Обозначив длину шага Эсена через x, Элизы – через y, получим систему

$$\begin{cases} 50x - 50y = 10 \\ 2x = 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y = 0{,}2 \\ 2x = 3y \end{cases}$$

Решение этой системы: $x = 0{,}6$, $y = 0{,}4$. Длина шага Эсена равна 0,6 метра.

Следующую информацию используйте для ответа на вопросы 22–23. Эти вопросы не зависят друг от друга.

В таблице приведено время, необходимое одному работнику для выполнения каждого из четырёх этапов работы по изготовлению ковра

Этапы	1	2	3	4
Время, дни	3	6	8	10

22) Первый этап работы выполнил один работник. Далее к нему присоединились ещё двое, и вместе они закончили работу. За сколько дней был изготовлен ковёр?

a) 9 b) 10 c) 11 d) 12 e) 13 f) 14

Решение

Этапы 2–4 выполнили три работника. Поэтому ковёр был изготовлен за $3 + (6 + 8 + 10)/3 = 11$ дней.

23) Первый и второй этап работы выполнили три работника, работая вместе. Далее один из них прекратил работу, и ковёр закончили оставшиеся. За сколько дней был изготовлен ковёр?

a) 9 b) 10 c) 11 d) 12 e) 13 f) 14

Решение

Этапы 1–2 выполнили три работника, этапы 3–4 – два. Следовательно, этот ковёр был изготовлен за (3 + 6)/3 + (8 + 10)/2 = 12 дней.

Следующую информацию используйте для ответа на вопросы 24–25. Эти вопросы не зависят друг от друга.

В таблице приведены названия фирм-спонсоров математической олимпиады, а также соответствующие объёмы спонсорской помощи в денежном выражении и в процентах.

Фирмы	«Альфа»	«Бета»	«Гамма»	«Дельта»	«Эпсилон»	Всего
Помощь в $	12000	6000			3000	
Помощь в %			18	22		100

24) Определите объём спонсорской помощи, оказанный фирмой «Дельта», в денежном выражении.

a) 7900 b) 7700 c) 8110 d) 7612 e) 8230 f) 7400

Решение

Обозначив общий объём спонсорской помощи через T, получим уравнение:

$12000 + 6000 + 0{,}18T + 0{,}22T + 3000 = T$.

Отсюда следует: $0{,}4T + 21000 = T => 21000 = 0{,}6T => T = 35000$.

Следовательно, объём спонсорской помощи, оказанный фирмой «Дельта», в денежном выражении равен $0{,}22T = 7700$.

25) Определите объём спонсорской помощи, оказанный фирмой «Эпсилон», в процентном выражении.

a) 9,11 b) 8,77 c) 8,11 d) 7,12 e) 8,57 f) 7,14

Решение

Так как общий объём спонсорской помощи равен 35000, объём спонсорской помощи, оказанный фирмой «Эпсилон», в процентном выражении равен 3000/35000 ≈ 0,0857 = 8,57%.

Следующую информацию используйте для ответа на вопросы 26–27.

При приёме на работу, фирма основывается на четырёх критериях, которые оцениваются исходя из следующих баллов:

Отзывчивость	Общительность	Предприимчивость	Наличие опыта
18	22	28	32

При этом, чтобы быть принятым, претендент должен набрать не меньше половины возможных баллов по каждому критерию и не меньше 70 баллов в сумме.

26) Оксана была принята на работу, набрав 28 баллов по критерию «Наличие опыта» и 26 баллов по критерию «Предприимчивость». Какое минимально возможное количество баллов получила Оксана?

a) 94 b) 77 c) 84 d) 72 e) 78 f) 74

Решение

Так как Оксана была принята на работу, по остальным критериям она набрала не меньше половины возможных баллов. Поэтому минимально возможное количество баллов составило 18/2 + 22/2 + 28 + 26 = 74 балла.

27) Мартин набрал больше баллов, чем Оксана, но не был принят на работу. Какое максимально возможное количество баллов получил Мартин?

a) 79 b) 82 c) 91 d) 90 e) 87 f) 94

Решение

Известно, что Мартин набрал больше баллов, чем Оксана. Он не был принят на работу, так как набрал меньше половины возможных баллов по одному из критериев.

Таким образом, максимально возможное количество баллов в такой ситуации Мартин мог получить, набрав меньше половины возможных баллов по наименее низко оцениваемому критерию – 8 баллов за отзывчивость и максимум – по всем остальным критериям. Поэтому он мог набрать 8 + 22 + 28 + 32 = 90 баллов.

Следующую информацию используйте для ответа на вопросы 28–29. Эти вопросы не зависят друг от друга.

Часы Эльдара спешат на 4 минуты, а часы в автобусе отстают на 3 минуты.

28) Эльдар сел в автобус, когда на его часах было 16:45, и вышел из автобуса, когда на часах в автобусе было 17:19. Сколько минут Эльдар провёл в автобусе?

a) 29 b) 27 c) 48 d) 41 e) 38 f) 56

Решение

По точным часам Эльдар сел в автобус в 16:41 и вышел из автобуса в 17:22. Следовательно, Эльдар провёл в автобусе 19 + 22 = 41 минуту.

29) Эльдар вышел из дома и через 7 минут сел в автобус. Через полчаса он вышел из автобуса, когда на часах в автобусе было 11:23. В какое время, по своим часам, Эльдар вышел из дома?

a) 10:39 b) 10:53 c) 11:03 d) 10:42 e) 10:37 f) 10:49

Решение

По точным часам Эльдар вышел из дома в 11:26 − 37 минут = 10:49. Следовательно, по своим часам, Эльдар вышел из дома в 10:53.

Следующую информацию используйте для ответа на вопросы 30–31. Эти вопросы не зависят друг от друга.

В таблице указаны ставки интереса, по которым можно поместить деньги на депозит.

	Ставка интереса (в %)	
	Менее 50 000 сомов	50 000 сомов или больше
На 6 месяцев	5	6
На 9 месяцев	7	8
На 12 месяцев	9	10

Пример. Поместив 10 000 на 9 месяцев, можно получить доход 10 000 · 0,07 · (9 / 12) = 525 сомов.

В финансовых операциях указывается годовая ставка: 9/12 – это 9 месяцев в годовом выражении.

30) Элида за 6 месяцев получила доход 1200 сомов. Сколько денег она положила на депозит?

a) 29 000 b) 27 000 c) 48 000 d) 41 500 e) 38 600 f) 56 000

Решение

Обозначив искомое число через P, получим уравнение:

$P \cdot 0{,}05 \cdot (6/12) = 1200$ сомов.

Поэтому P = 48000 сомов.

Здесь мы брали ставку интересов равной 5, не зная заранее, будет ли $P < 50\,000$ или же $P \geq 50\,000$. Полученное значение 48 000 соответствует случаю $P < 50\,000$,то есть соответствует выбранной ставке интересов.

Но в общем случае может оказаться так, что, взяв ставку интересов равной 6, мы получим другое значение P большее или равное 50 000, то есть тоже соответствующее выбранной ставке.

Тогда получим уравнение $P \cdot 0{,}06 \cdot (6/12) = 1200$, откуда $P = 40\,000 < 50\,000$, то есть получили несоответствие вложенной денежной суммы выбранной ставке 6. Значит, случай со ставкой 6 не имеет места. Ответ: 48 000 сомов.

31) Эсентур вложил 73 500 сомов на 9 месяцев. Сколько денег он должен вложить на 12 месяцев, чтобы получить такой же доход?

a) 39 000 b) 57 000 c) 48 000 d) 44 100 e) 49 000 f) 50 000

Решение

Обозначив искомое число через Q и предполагая, что Q не меньше, чем 50000, получим уравнение $73\,500 \cdot 0{,}08 \cdot (9/12) = Q \cdot 0{,}10 \cdot (12/12)$. Отсюда Q = 44 100 сомов. Но этот результат противоречит условию: Q не меньше, чем 50 000. Поэтому следует рассмотреть уравнение

$73500 \cdot 0{,}07 \cdot (9/12) = Q \cdot 0{,}09 \cdot (12/12)$.

Тогда Q = 42 875 сомов.

Следующую информацию используйте для ответа на вопросы 32–33. Эти вопросы не зависят друг от друга.

Маляр перемешивает красную (R), белую (W) и чёрную (B) краски, чтобы получить коричневую краску, в следующих отношениях:

$$\frac{R}{W} = \frac{1}{2}; \ \frac{W}{B} = \frac{3}{4}.$$

32) Маляр использовал 2,1 *кг* красной краски для получения коричневой. Сколько чёрной краски было использовано при этом?

a) 2,9 b) 2,7 c) 4,8 d) 4,5 e) 8,6 f) 5,6

Решение

Из данных соотношений получаем:

$$\frac{2{,}1}{W} = \frac{1}{2}; \ \frac{W}{B} = \frac{3}{4}.$$

Из первой пропорции: $W = 2{,}1 \cdot 2 = 4{,}2$. Тогда $\frac{4{,}2}{B} = \frac{3}{4}$.

Отсюда $B = 4{,}2 \cdot 4/3 = 5{,}6$.

33) Сколько белой краски понадобится для получения 8,5 *кг* коричневой краски?

a) 3 b) 5 c) 4,8 d) 4,5 e) 2,2 f) 2,5

Решение

Обозначив требуемые количества соответствующих красок через R, W и B, получим уравнение $R + W + B = 8{,}5$.

Из соотношений $\frac{R}{W} = \frac{1}{2}$; $\frac{W}{B} = \frac{3}{4}$ получаем: $R = W/2$; $B = 4W/3$.

Тогда $\frac{W}{2} + W + \frac{4W}{3} = 8{,}5$. Умножив уравнение на $2 \cdot 3$, получим: $3W + 6W + 8W = 51$. Отсюда $17W = 51 => W = 3$.

Следующую информацию используйте для ответа на вопросы 34–36. Эти вопросы не зависят друг от друга.

В клетках записаны натуральные числа. При этом выделенные числа равны произведению двух ближайших к ним чисел.

Например:

		28		
	4		7	
20		5		**35**

34) Найдите сумму $a + b + c$.

		56		
	a		b	
24		c		**21**

a) 19 b) 27 c) 14 d) 15 e) 18 f) 16

Решение

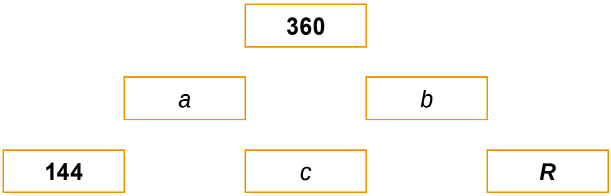
Для того чтобы найти числа a, b, c, нужно решить систему уравнений:

$$\begin{cases} ab = 56 \\ ac = 21 \\ ac = 24 \end{cases} <=> \begin{cases} a = 56/b \\ c = 21/b \\ (56/b) \cdot (21/b) = 24 \end{cases}$$

Из третьего уравнения: $56 \cdot 21 = 24b^2$. Тогда $b^2 = 56 \cdot 21/24 = 49$. Так как в клетках записаны натуральные числа, $b = 7$.

Тогда $a = 56/7 = 8$; $c = 21/7 = 3$; $a + b + c = 8 + 7 + 3 = 18$.

35) Какому числу не может быть равно R?



a) 640 b) 600 c) 810 d) 5760 e) 10 f) 6480

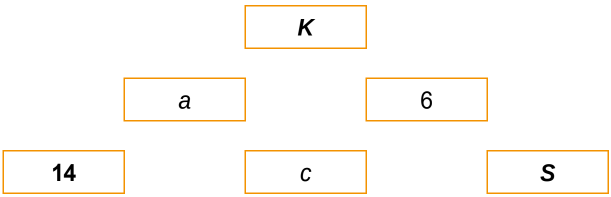
Решение

Согласно условиям, имеет место система уравнений:

$$\begin{cases} ab = 360 \\ ac = 144 \\ bc = R \end{cases} <=> \begin{cases} b = 360/a \\ c = 144/a \\ (360/a) \cdot (144/a) = R \end{cases}$$

Так как $R = \dfrac{360 \cdot 144}{a \cdot a} = \dfrac{6^2 \cdot 10 \cdot 12^2}{a^2}$, число R является произведением квадрата натурального числа и 10. Этому условию не удовлетворяет число 600.

36) Найдите произведение KS.



a) 194 b) 274 c) 824 d) 504 e) 186 f) 1176

Решение

Согласно условиям, имеет место система уравнений:

$$\begin{cases} 6 \cdot a = K \\ 6 \cdot c = S \\ ac = 14 \end{cases}$$

Тогда $KS = 6a \cdot 6c = 36ac = 36 \cdot 14 = 504$.

Следующую информацию используйте для ответа на вопросы 37–39. Эти вопросы не зависят друг от друга.

В компьютерную программу вводят натуральные числа, и она работает до тех пор, пока на выходе не появится число 1.

<table>
<tr><td colspan="3">1. Ввод</td></tr>
<tr><td colspan="3">2. Прочитать число N.
Если число N чётное, то выполнить 31, иначе – выполнить 32.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">31. k = N/2</td><td colspan="2">32. Если число N простое,
то выполнить 301, иначе – выполнить 302.</td></tr>
<tr><td>301. k = (N+1)/2</td><td>302. k = (3N+1)/2</td></tr>
<tr><td colspan="3">4. Прочитать число k.
Если k = 1, то выполнить 5, иначе N = k и выполнить 2.</td></tr>
<tr><td colspan="3">5. Закончить.</td></tr>
</table>

Например, если в программу вводится число 12, то программа закончит работу, выполнив четыре цикла: 12; 6; 3; 2; 1. Если же в программу вводится число 25, то программа закончит работу, выполнив семь циклов: 25; 38; 19; 10; 5; 3; 2; 1.

37) Если в программу вводится число 18, то в процессе работы программы число N не может быть равно:

a) 7; b) 14; c) 9; d) 2; e) 3; f) 4.

Решение

В процессе работы программа выполнит шесть циклов: 18; 9; 14; 7; 4; 2; 1. При этом число N не будет равно 3.

38) Если в программу вводится число 41, то программа закончит работу, выполнив X циклов. Число X равно:

a) 3; b) 4; c) 5; d) 6; e) 7; f) 8.

Решение

Если в программу вводится число 41, то программа закончит работу, выполнив следующие 7 циклов: 41; 21; 32; 16; 8; 4; 2; 1. Ответ: $X = 7$.

39) В программу вводится нечётное число. На втором цикле программа определяет, что N является чётным, и в итоге получается, что $k = 7$. Какое число было введено в программу?

a) 9 b) 11 c) 13 d) 15 e) 17 f) 19

Решение

В начале второго цикла число N равно 14. Если исходное число нечётно, то возможны два варианта.

Первый: оно равно 27. Этот вариант неверен, так как 27 не является простым числом.

Второй: $14 = (3N + 1)/2$. Тогда в начале первого цикла $N = 9$.

40) Определите площадь многоугольника $ABCDEF$, вершины которого имеют следующие координаты: $A(-1; 0)$, $B(0; 3)$, $C(2; 4)$, $D(0; 0)$, $E(2; -4)$, $F(0; -3)$.

a) 11 b) 10 c) 9 d) 8 e) 7 f) 6

Решение

Начертив на координатной плоскости многоугольник $ABCDEF$, увидим, что площадь многоугольника $ABCDEF$ получится, если от суммы площадей треугольника ABF и трапеции $BCEF$ вычесть площадь треугольника CDE.

Площадь треугольника ABF равна половине произведения длин основания BF и высоты: $0{,}5 \cdot 6 \cdot 1 = 3$.

Площадь трапеции $BCEF$ равна произведению полусуммы длин оснований BF и CE и высоты: $0{,}5(6 + 8) \cdot 2 = 14$.

Площадь треугольника CDE равна половине произведения длин основания CE и высоты: $0{,}5 \cdot 8 \cdot 2 = 8$.

Итак, площадь многоугольника $ABCDEF$ равна $3 + 14 - 8 = 9$.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Примерный календарно-тематический план (4 урока в неделю, 136 часов в год)

№ урока	Содержание учебного материала	Примерные сроки изучения тем и проведения контрольных работ
	I четверть 4 урока в неделю, 32 урока за четверть	
1–4	§ 1. Задачи на повторение	4.09 – 9.09
5–12	§ 2. Числовая ось. Уравнения с модулем	11.09 – 20.09
13	Проверочная работа	22.09
14–20	§ 3. Прямоугольная система координат на плоскости	25.09 – 7.10
21	Контрольная работа № 1	9.10
22–27	§ 4. Прямо пропорциональная зависимость. Пропорции	10.10 – 19.10
28–32	§ 5. Смеси	20.10 – 28.10
	II четверть 4 урока в неделю, 32 урока за четверть	
33–40	§ 6. Простейшие системы линейных уравнений	8.11 – 18.11
41	Контрольная работа № 2	20.11
42–47	§ 7. Свойства позиционной системы записи натуральных чисел	21.11 – 30.11
48–55	§ 8. Делимость чисел	1.12 – 14.12
56	Контрольная работа № 3	15.12
57–64	§ 9. Разложение натуральных чисел на множители. НОК	18.12 – 30.12

№ урока	Содержание учебного материала	Примерные сроки изучения тем и проведения контрольных работ
	III четверть **4 урока в неделю, 40 уроков за четверть**	
65–72	§ 10. Равенство обыкновенных дробей. НОД	11.01 – 24.01
73	Контрольная работа № 4	25.01
74–87	§ 11. Действия над обыкновенными дробями	27.01 – 19.02
88	Контрольная работа № 5	21.02
89–93	§ 12. Степени. Абсолютная и относительная погрешность	22.02 – 1.03
94–103	§ 13. Задачи на составление уравнений	2.03 – 19.03
104	Контрольная работа №.6	20.03
	IV четверть **4 урока в неделю, 32 урока за четверть**	
105–116	§ 14. Средние значения: среднее арифметическое. Мода. Медиана	2.04 – 21.04
117	Контрольная работа № 7	23.04 – 11.04
118–125	§ 15. Организация данных	25.04 – 7.05
126–129	§ 16. Окружность. Круг. Сектор	9.05 – 14.05
130	Контрольная работа № 8	16.05
131–134	Материалы для самостоятельной работы	18.05 – 23.05
135–136	Итоговая контрольная работа	25.05

Содержание курса. Компетенции

Содержание материала	Компетенции
§ 1. Задачи на повторение	Уметь: - складывать и вычитать числа разных разрядов; - решать простейшие уравнения; - умножать и делить натуральные, целые, дробные числа. Владение понятиями площади и объёма. Знание различных единиц измерения.
§ 2. Числовая ось. Уравнения с модулем	- Верно использовать в речи термины: *числовая ось, координатная прямая, координата точки на прямой, положительное число, отрицательное число, противоположные числа, целое число, модуль*. - Приводить примеры использования в окружающем мире положительных и отрицательных чисел. - Формулировать правила решения уравнений с модулем.
§ 3. Прямоугольная система координат на плоскости	- Верно использовать в речи термины: *перпендикулярные прямые, параллельные прямые, координатная плоскость, ось абсцисс, ось ординат, график*. - Объяснять, какие прямые называют перпендикулярными и какие – параллельными, формулировать их свойства. - Строить перпендикулярные и параллельные прямые с помощью чертёжных инструментов. - Строить на координатной плоскости точки и фигуры по заданным координатам, определять координаты точек.
§ 4. Прямо пропорциональная зависимость. Пропорции	- Верно использовать в речи термины: *отношение чисел, отношение величин, пропорция, основное свойство верной пропорции, прямо пропорциональные величины, масштаб*. - Использовать понятия отношения и пропорции при решении задач. Приводить примеры использования отношений в практике. - Использовать понятие масштаба при решении практических задач. - Решать задачи на проценты и дроби составлением пропорции.

Содержание материала	Компетенции
§ 5. Смеси	- Верно использовать в речи термины: *смесь, раствор*. - Приводить примеры из повседневной жизни. - Использовать понятия отношения и пропорции при решении задач на смеси. - Решать задачи на смеси с помощью уравнений.
§ 6. Простейшие системы линейных уравнений	Усвоить: - понятие линейного уравнения с двумя неизвестными; - понятие системы уравнений. - Верно использовать в речи термины: *коэффициент, раскрытие скобок, подобные слагаемые, приведение подобных слагаемых, линейное уравнение, подстановка*. - Умение выражать одну неизвестную через другую. - Решать простейшую систему уравнений с двумя неизвестными способом подстановки. - Решать задачи с применением системы уравнений.
§ 7. Свойства позиционной системы записи натуральных чисел	- Описывать свойства натурального ряда. - Верно использовать в речи термины: *цифра, число, называть классы и разряды в записи натурального числа*. - Читать и записывать натуральные числа, определять значность чисел, сравнивать и упорядочивать их. - Уметь записывать многозначные числа с помощью букв.
§ 8 Делимость чисел	- Формулировать определения делителя и кратного, простого и составного числа, свойства и признаки делимости. - Классифицировать натуральные числа – чётные и нечётные. - Верно использовать в речи термины: *делитель, кратное, простое число, составное число, чётное число, нечётное число, взаимно простые числа*. - Знать признаки делимости чисел на 2, 5, 10, 3, 9, 4 и 25.

Содержание материала	Компетенции
§ 9. Разложение натуральных чисел на множители. НОК	- Формулировать определения простых и составных чисел. - Из ряда натуральных чисел выбирать простые числа, используя способ «Решето Эратосфена». - Верно использовать в речи термины: *общее кратное, наименьшее общее кратное*. - Решать задачи с использованием наименьшего общего кратного.
§ 10. Равенство обыкновенных дробей. НОД	- Формулировать основное свойство обыкновенной дроби. - Использовать основное свойство пропорции для сравнения обыкновенных дробей. - Формулировать правила нахождения наименьшего общего кратного и наибольшего общего делителя. - Верно использовать в речи термины: *множество простых множителей, объединение множеств, пересечение множеств*. - Умение применять объединение множеств простых множителей для нахождения наименьшего общего кратного. - Умение применять пересечение множеств простых чисел для нахождения наибольшего общего делителя. - Формулировать определение сократимой и несократимой дроби. - Сокращать обыкновенные дроби.
§ 11. Действия над обыкновенными дробями	- Умение записывать обыкновенные дроби. - Формулировать определения правильных и неправильных дробей, смешанного числа. - Умение выполнять умножение и деление обыкновенных дробей. - Умение сравнивать обыкновенные дроби по числителю или знаменателю. - Умение складывать и вычитать обыкновенные дроби с одинаковыми знаменателями, с разными знаменателями. - Умение переводить смешанное число в неправильную дробь и неправильную дробь – в смешанное число.

Содержание материала	Компетенции
	- Использовать НОК для нахождения общего знаменателя. - Вычисление дробных выражений.
§ 12. Степени. Абсолютная и относительная погрешность	- Верно использовать в речи термины: *степень, основание, показатель степени, возведение в степень, погрешность, абсолютная и относительная погрешность*. - Формулировать определение степени. - Формулировать правила умножения и деления степенных выражений с одинаковым основанием. - Формулировать правила умножения степенных выражений с разными основаниями и одинаковой степенью. - Понятие погрешности. - Формулировать и применять правила нахождения абсолютной и относительной погрешностей.
§ 13. Задачи на составление уравнений	- Верно использовать в речи термины: *коэффициент, раскрытие скобок, подобные слагаемые, корень уравнения, линейное уравнение*. - Грамматически верно читать записи уравнений. - Находить корни уравнения. - Решать уравнения с обыкновенными дробями. - Решать уравнения умножением или делением обеих его частей на одно и то же, не равное нулю, число путём переноса слагаемого из одной части уравнения в другую. - Решать текстовые задачи с помощью уравнений с дробями.
§ 14. Средние значения: среднее арифметическое. Мода. Медиана	- Формулировать определение среднего арифметического и его обозначение. - Вычислять среднее арифметическое, применяя формулу. - Находить сумму чисел по среднему арифметическому. - Уметь решать задачи на нахождение среднего арифметического. - Формулировать определение медианы, моды числового ряда, знать их обозначения. - Характеризовать числовой ряд, ранжированный числовой ряд.

Содержание материала	Компетенции
	- Находить медиану с нечётным или чётным количеством членов числового ряда. - Находить моду числового ряда. - Составлять таблицы.
§ 15. Организация данных	Знать способы организации данных. Уметь строить круговые, столбчатые диаграммы. Уметь пользоваться таблицами.
§ 16. Окружность. Круг. Сектор	- Верно использовать в речи термины: *окружность, круг, сектор, радиус, диаметр, число π.* Уметь: - вычислять площадь круга, длину окружности, площадь сектора, длину дуги.

Контрольные работы

Контрольная работа № 1

Вариант 1

1. Найдите длину отрезка, определённого точками.
A (7; 3) и B (−3; 3)

2. Вычислите значение выражения.
a) $|2{,}1 - 18{,}5| =$
b) $|-13{,}5 + 74| =$

3. Решите уравнение.
$|x - 5{,}12| = 2{,}01$

4. Найдите координату точки на числовой оси, расстояние от которой до точки M (5, 6) равно 3,1.

5. Из двух городов, расстояние между которыми 208 *км*, выехали одновременно навстречу друг другу два велосипедиста и встретились через 8 *ч*. Скорость одного из них 14 *км/ ч*. Определите скорость второго велосипедиста.

Вариант 2

1. Найдите длину отрезка, определённого точками.
   $A\ (-4;\ 9)$ и $B\ (7;\ 3)$

2. Вычислите значение выражения.
   a) $|50{,}1 - 87| =$
   b) $|-1{,}15 + 7{,}4| =$

3. Решите уравнение.
   $|x + 2{,}37| = 2{,}21$

4. Найдите координату точки на числовой оси, расстояние от которой до точки $M\ (6,\ 3)$ равно 2,8.

5. Из двух городов, расстояние между которыми 140 *км*, выехали одновременно навстречу друг другу два автомобиля и встретились через 8 *ч*. Какое расстояние будет между ними через два часа после встречи?

Контрольная работа № 2

Вариант 1

1. Проверьте, составляют ли пропорцию отношения?
a) 18 : 2 и 54 : 6
b) 4,5 :1,5 и 1,26 : 0,42

2. Решите уравнение.

$$\frac{x+2}{4} = \frac{7}{5}$$

3. За 4 часа токарь изготовил 34 детали. Сколько деталей он изготовит за 14 часов, если будет работать с той же производительностью?

4. Решите систему уравнений.

$$\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - y = 2 \end{cases}$$

5. В клетке сидят куры и кролики. У них 19 голов и 62 ноги. Сколько кур и кроликов в клетке?

Вариант 2

1. Проверьте, составляют ли пропорцию отношения?
a) 15 : 3 и 35 : 7
b) 1,3 : 0,7 и 39 : 21

2. Решите уравнение.

$$\frac{18}{1+5x} = \frac{4}{3}$$

3. За 9 часов трактор обрабатывает площадь 7 *га*. За какое время он обработает 35 *га*?

4. Решите систему уравнений.

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + 3y = 2 \end{cases}$$

5. На лугу гуляли овцы и гуси. Пастух посчитал, что у них 33 головы и 91 нога. Сколько овец и гусей паслось на лугу?

Контрольная работа № 3

Вариант 1

1. Вычислите.
$217 \cdot 35 - 215 \cdot 36 =$

2. Разложите на простые множители числа.
a) 216
b) 65

3. Решите уравнение.
$(4{,}9 - x) : 1{,}2 = 3$

4. Найдите, при каких значениях x число $\overline{52x4}$ делится на:
a) 4; b) 3.

5. Найдите, при каких значениях x число $\overline{37x871}$ делится на:
a) 3; b) 9.

Вариант 2

1. Вычислите.
$321 \cdot 82 - 32 \cdot 17 =$

2. Разложите на простые множители числа.
a) 162
b) 99

3. Решите уравнение.
$3{,}8 \cdot (x - 0{,}2) = 2{,}28$

4. Найдите, при каких значениях x число $\overline{337x}$ делится на:
a) 4 b) 25.

5. Найдите, при каких значениях x число $\overline{2x8472}$ делится на:
a) 3; b) 9.

Контрольная работа № 4

Вариант 1

1. Разложите на простые множители число 2139.
2. Используя «Решето Эратосфена», выпишите все простые числа, не превосходящие число 38.
3. Найдите наименьшее общее кратное (НОК) чисел 72 и 99.
4. Найдите наибольший общий делитель (НОД) чисел 49 и 22.
5. Улан может прополоть грядку за 18 минут, Лёша – за 13 минут, а Карина – за 26 минут. За сколько минут они могут прополоть грядку, работая вместе?

Вариант 2

1. Разложите на простые множители число 3751.
2. Используя «Решето Эратосфена», выпишите все простые числа, не превосходящие число 39.
3. Найдите наименьшее общее кратное (НОК) чисел 75 и 60.
4. Найдите наибольший общий делитель (НОД) чисел 27 и 18.
5. Чингиз может покрасить забор за 6 дней, Алик – за 7 дней, а Асель – за 14 дней. За сколько дней они могут покрасить забор, работая вместе?

Контрольная работа № 5

Вариант 1

1. Вычислите.

a) $\frac{17}{28} \cdot \frac{3}{5} =$ b) $\frac{7}{13} : \frac{3}{5} =$

2. Сравните дроби.

$\frac{17}{28}$ и $\frac{8}{41}$

3. Представьте смешанные числа в виде неправильной дроби.

a) $1\frac{5}{7}$ b) $2\frac{4}{5}$ c) $3\frac{7}{9}$

4. Представьте неправильные дроби в виде смешанного числа.

a) $\frac{34}{7}$ b) $\frac{42}{5}$ c) $\frac{48}{11}$

5. Выполните действия.

$1\frac{7}{15} + 2\frac{3}{15} - 1\frac{8}{15} =$

Вариант 2

1. Вычислите.

a) $\frac{27}{36} \cdot \frac{18}{21} =$ b) $\frac{2}{3} : \frac{9}{14} =$

2. Сравните дроби.

$\frac{13}{84}$ и $\frac{10}{63}$

3. Представьте смешанные числа в виде неправильной дроби.

a) $1\frac{3}{5}$ b) $2\frac{3}{8}$ c) $3\frac{4}{11}$

4. Представьте неправильные дроби в виде смешанного числа.

a) $\frac{29}{3}$ b) $\frac{19}{5}$ c) $\frac{38}{13}$

5. Выполните действия.

$3\frac{2}{17} + 1\frac{12}{17} - 3\frac{8}{17} =$

Контрольная работа № 6

Вариант 1

1. Запишите произведение в виде степени.
a) $0{,}9 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}9$ b) $42 \cdot 42 \cdot 42 \cdot 42 \cdot 42$

2. Вычислите.
a) $(-1{,}5)^3 =$ b) $2 \cdot 3^4 - 3 \cdot 2^4 =$

3. Вставьте недостающие числа в волшебную *умножательную* таблицу.

6^9	
6^5	6^{11}

4. Вычислите.
$(217 - 43{,}07 \cdot 4)^0 + 5 \cdot 2{,}32 =$

5. Число 19,7 округлите до целых. Найдите абсолютную и относительную погрешности приближённого значения.

Вариант 2

1. Запишите произведение в виде степени.
a) $0{,}3 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}3$ b) $32 \cdot 32 \cdot 32 \cdot 32 \cdot 32$

2. Вычислите.
a) $(-1{,}2)^3 =$ b) $2 \cdot 5^3 - 5 \cdot 2^3 =$

3. Вставьте недостающие числа в волшебную *умножательную* таблицу.

	8^7
8^5	8^9

4. Вычислите.
$17{,}83^0 \cdot 6{,}4 + 3{,}2 \cdot 2 =$

5. Число 20,3 округлите до целых. Найдите абсолютную и относительную погрешности приближённого значения.

Контрольная работа № 7

Вариант 1

1. Вычислите среднее арифметическое чисел:
17; 21; 12; 15; 12.

2. Среднее арифметическое N чисел равно μ. Чему равна сумма этих N чисел?
a) $N = 12$, $\mu = 16$ b) $N = 15$, $\mu = 8{,}3$

3. Найдите моду и медиану числового ряда:
55; 54; 51; 55; 53; 53; 54; 52.

4. Определите значение медианы совокупности чисел.
$\{-5{,}1;\ 22;\ 17;\ 3{,}3;\ -14;\ -1\}$

5. Золушка вырастила 4 тыквы, средний вес которых 3,4 *кг*. Чему равен их общий вес?

Вариант 2

1. Вычислите среднее арифметическое чисел:
11; 16; 23; 12; 7.

2. Среднее арифметическое N чисел равно μ. Чему равна сумма этих N чисел?
a) $N = 15$, $\mu = 17$ b) $N = 17$, $\mu = 2{,}3$

3. Найдите моду и медиану числового ряда:
54; 53; 50; 54; 53; 50; 50; 52.

4. Определите значение медианы совокупности чисел.
$\{11{,}7;\ 12{,}6;\ 6{,}5;\ -3{,}4;\ -3{,}13;\ 6{,}5\}$

5. Ксения принесла домой 3 пакета макарон. Сколько всего макарон она принесла, если средний вес пакета равен 1,25 *кг*?

Контрольная работа № 8

Вариант 1

1. Найдите значение выражения.

$45 : 3\frac{6}{13} - 13{,}6 + 1\frac{3}{8} =$

2. Решите уравнения.

a) $2{,}6x - 0{,}75 = 0{,}9x - 35{,}6$ b) $6\frac{3}{7} : 1\frac{6}{7} = 4{,}5 : y$

3. Постройте треугольник MKP, если $M(-3; 5)$, $K(3; 0)$, $P(0; -5)$.

4. Путешественник в первый день прошёл 15% всего пути, во второй день $\frac{2}{7}$ всего пути. Какой путь прошёл путешественник во второй день, если в первый он прошёл 21 *км*?

5. В двузначном натуральном числе сумма цифр равна 13. Число десятков на 3 больше числа единиц. Найдите это число.

Вариант 2

1. Найдите значение выражения.

$37 : 2\frac{3}{17} - 17{,}8 + 1\frac{2}{7} =$

2. Решите уравнения.

a) $3{,}4y + 0{,}65 = 0{,}9y - 25{,}6$ b) $1\frac{1}{3} : 5\frac{2}{9} = x : 4{,}7$

3. Постройте треугольник BCF, если $B(-3; 0)$, $C(3; -4)$, $F(0; 5)$.

4. С молочной фермы 14% всего молока отправили в детский сад и $\frac{3}{7}$ всего молока – в школу. Сколько молока отправили в школу, если в детский сад отправили 49 литров?

5. В двузначном натуральном числе сумма цифр равна 16. Число десятков на 2 меньше числа единиц. Найдите это число.

Далее мы приводим две статьи, которые касаются различных аспектов образования, и надеемся, что они будут вам полезны.

О формулах сокращённого умножения, Пифагоре и не только о них

Математика является эффективным инструментом изучения мира. Даже те, кто громко заявляют о своём непонимании, неприятии математики, регулярно ею пользуются – например, при совершении покупок. По нашему мнению, главная цель математического образования школьников состоит в том, чтобы дать им возможность расширить сферы применения математики.

Рост возможностей для применения математики может происходить непосредственно – учащийся приобретает конкретные навыки, используемые при финансовых расчётах, геометрических построениях, измерениях и т. п., а также косвенным путём – совершенствуя мыслительную деятельность. Математические методы позволяют выработать навыки перехода от частного к общему и наоборот, ясно проследить причинно-следственные связи, научиться рассуждать «от противного» и т. п.

Главный недостаток современной системы обучения математике, на наш взгляд, состоит в чрезмерном упоре на выработку техники конкретных математических вычислений. Школьник должен уметь решать множество типов тригонометрических, логарифмических, иррациональных и т. д. уравнений и неравенств, про которые даже их преподаватели часто не могут сказать, где это используется. Конечно, всегда можно сослаться на необходимость тренировки ума. Но тренировать ум гораздо интереснее и полезнее, используя текстовые задачи, задачи с практическим содержанием, делая больший упор на смысловую, а не техническую часть математики.

Курс математики должен строиться с упором на математические модели, на методы, позволяющие решать задачи с конкретным содержанием, по спирали – с постепенным усложнением изучаемого материала. Этот процесс должен естественным образом порождать необходимость изучения новых разделов математики. Например, вычисление величины депозита является простейшей задачей на проценты, а определение времени, за которое величина депозита достигает определённого значения, требует введения логарифмов.

Задача, которую должны уметь решать ученики младших классов:

Батыр спасёт принцессу, если доскачет до дворца за 40 минут. Успеет ли он, если до дворца 18 км, а он скачет со скоростью 30 км/час?

Постепенно усложняясь, к моменту окончания школьного курса эта задача может трансформироваться в следующую:

Султан обещает отдать принцессу и половину султаната тому, кто сумеет добраться первым до дворца из оазиса в пустыне на автомобиле, который может ехать со скоростью 48 км/час по пескам и 80 км/час по дороге. Жених КАТЕТС решил ехать по кратчайшему расстоянию от оазиса до дороги, оно равно 32 км, а затем по дороге до дворца 68 км. Жених ГИПОТЕНИУЗ решил ехать по кратчайшему расстоянию от оазиса до дворца. Третий жених, ОПТИМАТОР, решил вначале составить оптимальный маршрут, а затем ехать. Сколько времени он может потратить на составление маршрута?

Сейчас многие говорят о том, что нужно улучшить качество преподавания математики, но при этом не говорят о том, как это сделать. По нашему мнению, необходимо активно работать над созданием современных учебников и учебно-методических материалов и доведением их до школьных учителей. Своим видением того, какими должны быть разрабатываемые материалы, мы хотим поделиться с коллегами в этой работе.

Изложение построено в виде небольшой пьесы.

Действующими лицами являются:

Елисей Елисеевич (ЕЕ) – руководитель математического кружка;

Шаршенбек (Ш), Зина (З), Гульнара (Г), Анаркуль (А), Сыргак (С) – члены кружка.

Занятие 1

ЕЕ. Вычислите значение выражения $102^2 - 98^2$.

З. Восемьсот!

Ш. Нечестно! Я только успел подсчитать значение первого квадрата.

С. Она знала ответ!

ЕЕ. Погодите. Не горячитесь. Зина, покажи, как ты получила ответ.

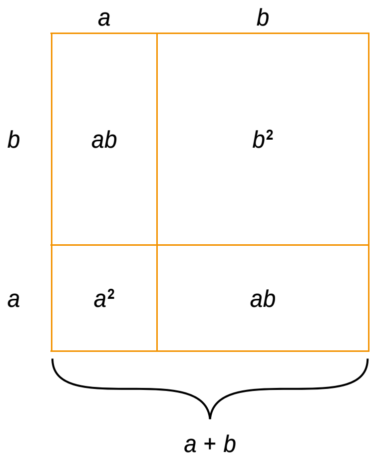
З. Я знаю, что разность квадратов двух выражений равна произведению суммы и разности этих выражений. В этом очень легко убедиться:

$(m + n)(m - n) = m^2 - mn + nm - n^2 = m^2 - n^2$.

Поэтому $102^2 - 98^2 = (102 + 98)(102 - 98) = 200 \cdot 4 = 800$.

С. Здорово!

Г. А я могу легко вычислить 102^2. Для этого используется формула, которую очень просто понять, если нарисовать чертёж:



Площадь всего квадрата равна $(a + b)^2$. Он состоит из двух квадратов, площадь одного из них равна a^2, другого – b^2 и двух прямоугольников, площадь каждого – ab. Следовательно, имеет место формула:

$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$. (1)

Поэтому

$102^2 = (100 + 2)^2 = 100^2 + 2^2 + 2 \cdot 100 \cdot 2 = 10000 + 4 + 400 = 10404$.

А. А я догадалась, как легко вычислить значение выражения 98^2. Если в формуле (1) положить $a = x$, $b = -y$,

то $(x + (-y))^2 = x^2 + (-y)^2 + 2x(-y)$.

Это равенство можно переписать в виде

$(x - y)^2 = x^2 + y^2 - 2xy$. (2)

Поэтому

$98^2 = (100 - 2)^2 = 100^2 + 2^2 - 2 \cdot 100 \cdot 2 = 10000 + 4 - 400 = 9604$.

Ш. А я, а я знаю, как получить формулы (1) и (2) по-другому! Итак, $(a + b)^2$ – это $(a + b)$ умножить на $(a + b)$. Следовательно,

$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Точно так же

$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

ЕЕ. Ребята! Я думаю, что у нас сегодня получилась очень интересная встреча.

Формулы

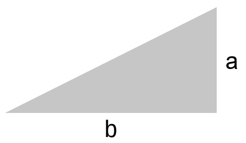
$(m+n)(m-n)=m^2-n^2$;

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$;

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$, которые мы сегодня обсуждали, называются **формулами сокращённого умножения**. О других таких формулах мы поговорим через год. Для закрепления пройденного материала дома составьте упражнения на использование формул сокращённого умножения для вычисления значения числовых выражений.

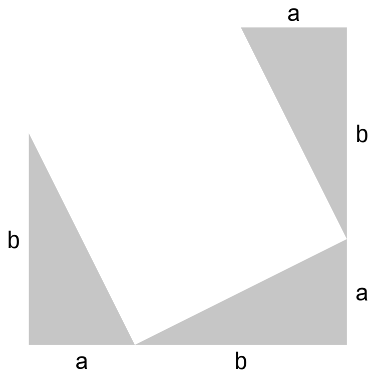
ЕЕ. Продолжим занятие. Шаршенбек, возьми в шкафу деревянный прямоугольный треугольник – шаблон – и нарисуй с его помощью прямоугольный треугольник на доске, обозначь его катеты и гипотенузу.

Ш.



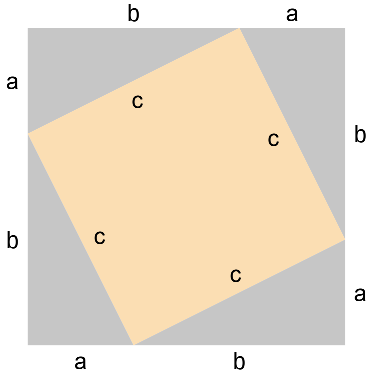
ЕЕ. Теперь, нарисуй с помощью шаблона ещё два прямоугольных треугольника, приставив к каждому катету другой катет.

Ш.



ЕЕ. И, наконец, дорисуй чертёж, приставив шаблон ещё раз.

Ш.



ЕЕ. Ребята, перечислите, что вы видите на доске.

Г. Я вижу четыре прямоугольных треугольника с катетами a и b и гипотенузой c.

З. Я вижу квадрат со стороной $a + b$.

С. Я вижу другой квадрат.

А. Да, да, там есть квадрат со стороной c.

ЕЕ. Теперь давайте поговорим о площадях этих фигур.

Г. Площадь прямоугольного треугольника с катетами a и b равна $ab/2$.

З. Площадь квадрата со стороной $a + b$ равна $(a + b)^2$.

С. Площадь маленького квадрата равна c^2.

А. Так как большой квадрат со стороной $a + b$ состоит из четырёх прямоугольных треугольников и маленького квадрата, можно написать равенство $(a + b)^2 = 4(ab/2) + c^2$.

Г. Ой, а если раскрыть скобки, то получится $a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$.

З. Теперь можно убрать $2ab$ слева и справа, и тогда получится $a^2 + b^2 = c^2$.

Ш. Оказывается, имеет место непосредственная связь между длинами сторон прямоугольного треугольника.

ЕЕ. Ребята, мы сегодня получили замечательный результат, который был известен нашим далёким, далёким предкам, несколько тысяч лет назад. Сейчас его называют теоремой Пифагора. Он справедлив для любых прямоугольных треугольников. Итак…

Все хором: Сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы!

Занятие 2

ЕЕ. На прошлом занятии мы познакомились с теоремой Пифагора. Я попросил Зину приготовить небольшое сообщение об этом выдающемся человеке.

З. Пифагор, сын Мнесарха, самосец, родился в 576 г. до н. э. По преданию, он учился в Египте, много путешествовал. Около 532 г. он осел в Кротоне, где быстро завоевывал широкую известность и создал религиозно-философскую и политическую организацию – Пифагорейский союз. Пифагор попытался создать «аристократию духа» в лице своих учеников, которые вели государственные дела так отменно, что поистине это была аристократия, что значит «владычество лучших». Талант политического оратора и религиозного проповедника принесли Пифагору успех. Недаром слово «Пифагор» означает «убеждающий речью». Пифагор был, видимо, первым, кто открыл человечеству могущество абстрактного знания. Он показал, что именно разум, а не органы чувств приносят человеку истинное знание. Вот почему он советовал своим ученикам переходить от изучения физических объектов к изучению абстрактных математических объектов.

Так математика становится у Пифагора орудием познания мира. А за математикой следует и философия, ибо философия есть не что иное, как распространение накопленного специального (в данном случае – математического) знания на область мировоззрения. Так рождается знаменитый пифагорейский тезис: «Все есть число». Так в недрах пифагорейского союза рождаются математика и философия. Они считали возможным при помощи математики достигнуть очищения и соединения с богами. Математика была одной из составных частей их религии. «Бог – это единство, а мир – множество и состоит из противоположностей. То, что приводит противоположности к единству, есть гармония. Гармония является божественной и заключается в числовых отношениях. Кто до конца изучит эту божественную числовую гармонию, сам станет божественным и бессмертным».

Тройки натуральных чисел, удовлетворяющих уравнению $a^2 + b^2 = c^2$, пифагорейцы считали священными.

ЕЕ. Кто знает такую тройку? Их мы будем называть *пифагоровыми*.

З. Пифагоровой является тройка (3; 4; 5). Несложно увидеть, что $3^2 + 4^2 = 5^2$.

Ш. По-моему, пифагоровой будет тройка (6; 8; 10).

ЕЕ. Правильно, так как $6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100 = 10^2$. Но, обратите внимание на сходство троек, предложенных Зиной и Шаршенбеком.

Г. Я поняла! Пифагоровыми будут тройки (9; 12; 15), (12; 16; 20) и так далее.

ЕЕ. Молодец, Гульнара! Сформулируйте, пожалуйста соответствующее правило.

Г. ***Если все элементы пифагоровой тройки умножить на одно и то же натуральное число, то получится пифагорова тройка***.

ЕЕ. Надеюсь, что все поняли, как получить сколько угодно пифагоровых троек. Поэтому будет интересно находить ***тройки с взаимно простыми элементами, то есть тройки, не имеющие общего множителя, типа (3; 4; 5). Такие тройки называют примитивными***. Далее мы будем искать примитивные тройки.

Г. Наверное, это очень трудная задача?

ЕЕ. Да нет. Для начала ответьте на вопрос: «Существует ли примитивная тройка вида (4; 6; n), где n – натуральное число?»

С. Так как n может принимать очень много значений, наверное, среди них есть нужное.

А. Я знаю правильный ответ! Такой тройки нет! Если $4^2 + 6^2 = n^2$, то n^2 является чётным числом, тогда и n – чётное число. Следовательно, тройка (4; 6; n) не будет примитивной, так как все элементы тройки являются чётными, то есть имеют общий множитель 2.

ЕЕ. А можно ли обобщить рассуждение Анары? (4; 6; n), где n – натуральное число.

С. Да! Примитивная пифагорова тройка имеет два нечётных и один чётный элемент.

ЕЕ. Давайте двинемся дальше. При решении задачи бывает важно изменить её так, чтобы можно было использовать известные нам методы, формулы и т. п. Давайте перепишем уравнение $a^2 + b^2 = c^2$ в виде $a^2 = c^2 - b^2$.

З. Ой! А я знаю, что это уравнение можно переписать в виде $a^2 = (c - b)(c + b)$.

ЕЕ. Правильно. Теперь можно попытаться найти пифагорову тройку методом подбора. Также, для определённости, давайте будем считать, что $a < b < c$.

Ш. Самый простой вариант – когда $c - b = 1$. В этом случае одно из этих чисел – чётное, другое – нечётное. Соответственно, a должно быть нечётным.

С. Так, $a = 1$ не годится. Если $a = 3$, то $3^2 = 1(c + b)$; $9 = c + b$. Так как $a < b < c$, этому уравнению удовлетворяют только $b = 4$ и $c = 5$.

З. Ура! Получилась тройка (3; 4; 5), о которой я уже говорила.

А. Я хочу попробовать. Возьмём $a = 5$, тогда $5^2 = 1(c + b)$; $25 = c + b$, $5 < b < c$. Если $b = 6$, то $c = 19$.

С. Нужно проверить. Так, $5^2 = 25$, $6^2 = 36$, а 19^2 можно вычислить следующим образом:

$19^2 = (20 - 1)^2 = 20^2 - 2 \cdot 20 \cdot 1 + 1^2 = 400 - 40 + 1 = 361.$

Но 25 + 36 не равно 361. В чём же дело?

А. А я знаю! Мы забыли о том, что $c - b = 1$. Так что должно быть $c = b + 1$, и тогда

$25 = c + b$; $25 = 2b + 1$. Поэтому $b = 12$, $c = 13$.

С. Проверяем: $5^2 = 25$, $12^2 = 144$, $13^2 = 169$. Получается верное равенство, $25 + 144 = 169$.

Следовательно, (5, 12, 13) – примитивная пифагорова тройка.

З. Ребята! У нас получилось, что уравнение $a^2 = 2b + 1$ позволяет получить примитивную пифагорову тройку (a, b, c) для любого нечётного значения a, начиная с трёх, при этом $c - b = 1$. Я хочу проверить этот результат, взяв $a = 13$.

Тогда $13^2 = 2b + 1 <=> 169 - 1 = 2b$.

Отсюда следует, что $b = 84$, $c = 85$.

С. Давайте проверим. Так, $13^2 = 169$, а 84^2 и 85^2 можно вычислить следующим образом:

$84^2 = (80 + 4)^2 = 80^2 + 2 \cdot 80 \cdot 4 + 4^2 = 6400 + 640 + 16 = 7056;$

$85^2 = (80 + 5)^2 = 80^2 + 2 \cdot 80 \cdot 5 + 5^2 = 6400 + 800 + 25 = 7225.$

Тогда имеет место верное равенство: $169 + 7056 = 7225$.

Г. Ой, как интересно! Я хочу рассмотреть случай $c - b = 2$.

Ш. Тогда c и b должны быть нечётными.

Г. Да знаю я. Ещё a должно быть чётным. Если $a = 2$, то $2^2 = 2(c + b)$. Так как должно быть $2 < b < c$, этот вариант не годится.

А если взять $a = 4$, то $4^2 = 2(c + b)$? Так как из $c - b = 2$ следует $c = b + 2$, получаем, что $16 = 2(2b + 2)$. Отсюда получим, что $b = 3$, $c = 5$.

З. Опять получилась моя тройка (3, 4, 5).

ЕЕ. Формально это решение не годится, потому что мы договаривались, что $a < b$.

Г. Значит, нужно рассмотреть случай $a = 6$. Тогда, $6^2 = 2(c + b)$, и отсюда: $36 = 2(2b + 2)$. В результате получается $b = 8$, $c = 10$, и, соответственно, тройка (6; 8; 10).

З. А она не примитивная. Если каждый элемент разделить на 2, то снова получится тройка (3, 4, 5).

Г. Что-то мне не везёт. Попробую-ка ещё раз. Если $a = 8$, то $8^2 = 2(c + b)$, и $64 = 2(2b + 2)$. Тогда $b = 15$, $c = 17$. Ура! Получилась примитивная тройка (8; 15; 17).

ЕЕ. Замечательно! На этом давайте завершим наше занятие. Дома я предлагаю вам подумать над следующими вопросами.

- При каких значениях a, при условии $c - b = 2$, можно найти примитивную пифагорову тройку?
- Существуют ли примитивные пифагоровы тройки при условии: $c - b = 2$; $c - b = 4$; $c - b = 5$; $c - b = 8$?

Темами последующих занятий могут быть:

- рассмотрение задач на использование теоремы Пифагора;
- использование формул сокращённого умножения для вывода формулы корней квадратного уравнения;
- знакомство с великой теоремой Ферма.

Из введения в курс «Математика»

1. Нематематики часто задают вопрос: «Зачем нужно изучать математику?» На этот вопрос можно дать много ответов. Некоторые из них:

- Для того чтобы сдать экзамен.
- Для того чтобы научиться использовать математические методы для решения проблем, возникающих в экономике, социологии, психологии, политологии и других областях жизни.
- Изучение математики – один из наилучших методов развития логического мышления. А умение мыслить логически полезно всем, начиная от малых детей и кончая президентами.
- Для того чтобы получить Нобелевскую премию. Например, известно, что большая часть работ, удостоенных Нобелевской премии по экономике (Д. Хикс, Р. Солоу, В. Леонтьев, Л. Канторович, П. Самуэльсон…), связана с использованием математических методов. Более того, многие, добившиеся успехов в других областях, такие как лауреат Нобелевской премии по литературе А. Солженицин, имеют математическое образование.

Для того чтобы лишний раз подчеркнуть полезность использования математических методов, приведём отрывок из знаменитой книги Л. Соловьева «Повесть о Ходже Насреддине».

... Именно так и решил маленький Насреддин: если бухарские жители не умеют сами быть милосердными – надо их вынудить к этому.

Определив задачу, он тем самым определил и русло своих дальнейших размышлений. Они сводились к поискам такой игры, в которой он имел бы перевес над бухарцами. Чтобы не затруднять себя раздумьями о многих тысячах бухарских жестокосердных жителей, он счёл полезным слить в своём воображении всех вместе, в одного Большого Бухарца.

Дело упростилось: думать об одном Бухарце, хотя и очень большом, оказалось много легче...

Рассуждения маленького Насреддина являются ярким примером использования математического моделирования ситуации, хотя, скорее всего, он сам об этом не знал.

2. Приведём несколько задач, которые будут способны решать овладевшие данным курсом.

I. Эльмира хочет получить кредит на один год. Коммерческий банк просит 35% за свои услуги. Кроме того, у неё есть знакомый, предлагающий помочь получить кредит за 10%. Однако в этом случае Эльмира получит на руки только 80% от оговоренной суммы. Остальные 20% нужно будет отдать за помощь, то есть они составят «шапку». Какой вариант предпочтительнее?

II. Канат может купить машину за $5000 и перепродать её через 5 лет за $1800 или же арендовать её, выплачивая по $1000 в конце каждого из 5-ти лет. Какой вариант выгоднее, если ожидаемая доходность 10%?

III. Специалисты АО «Молоко» в сентябре определили спрос и предложение сливочного масла следующим образом: при цене 90 сомов за килограмм – 1800 *кг* и 800 *кг*; при цене 110 сомов за килограмм – 1500 *кг* и 1100 *кг* соответственно. В декабре объём спроса при каждой цене увеличился на 2%, кривая предложения сдвинулась параллельно себе влево, и теперь при цене 110 сомов предлагают 1000 *кг*. Считая, что функции спроса и предложения линейны, определите: уравнения спроса и предложения, а также точку рыночного равновесия в сентябре; уравнения спроса и предложения, а также точку рыночного равновесия в декабре.

IV. Предприятие выпускает изделия двух типов, обрабатывая каждое из них сначала в цехе *A*, а затем в цехе *B*. Обработка каждого изделия первого типа занимает 5 часов в цехе *A* и 3 часа в цехе *B*.

Соответствующие данные по изделию второго типа – 2 и 4. Цех *A* в состоянии работать не более 150 часов в месяц, а цех *B* – 132 часа. Известно, что за каждое изделие первого типа предприятие получает прибыль 3000 сомов, а за каждое изделие второго типа – 2000 сомов. Определите, сколько изделий каждого типа следует выпускать на предприятии, чтобы получать максимальную прибыль.

V. Нарисуйте эскиз графика функции, выражающей зависимость количества (Q) потребляемого товара от уровня располагаемого дохода (I) и определите вид товара (первой необходимости, некачественный, роскоши)

$$Q = \frac{5I}{2I + 3}$$

VI. Алтымыш нанял пароход для перевозки грузов на 1000 *км*. Он предлагает команде парохода плату в размере 1500 монет, но требует вернуть обратно 9 монет за каждый час пребывания в пути. Если скорость парохода будет v *км*/ *час*, то расходы будут равны $10v$ монет. С какой скоростью нужно вести пароход, для того чтобы заработать максимальное количество монет? Какое это количество?

VII. На сколько сомов увеличатся издержки производства товара при увеличении объёма производства с 90 до 100 единиц, если предельные издержки производства x единиц товара равны $3x^2 - 200x + 1500$ сомов?

VIII. Производственная функция фирмы имеет вид $P(K,L) = 30K^{1/3}L^{2/3}$. Цена единицы труда $PL = 2$, единицы капитала $PK = 27$. Чему равен минимум бюджета (расходы на покупку труда и капитала), необходимый для выпуска 5400 единиц продукции?

IX. Используя нижеприведённые данные, напишите уравнение прямой, наилучшим образом выражающей связь между затратами на научные исследования и прибылью фирм аэрокосмической отрасли.

Затраты (в млн $)	82	2,7	0,7	36
Прибыль (в млн $)	197	7,3	− 15,5	82

X. Стоимость участка земли непрерывно возрастает со скоростью, пропорциональной её стоимости. Сколько будет стоить участок стоимостью 100 000 сомов через 5 лет, если год назад он стоил 90 000?

3. Как и любая другая наука, математика имеет свой язык. Этот язык включает основные понятия – точка, прямая, число, множество... Конечно, каждый представляет, что означают эти слова, но при этом иногда требуются некоторые уточнения. Так, к примеру, в математике предполагается, что точка не имеет площади, прямая имеет бесконечную длину и не имеет толщины.

В математическом языке часто упоминаются слова: определение, аксиома, лемма, теорема.

Определением называется высказывание, посредством которого вводятся новые понятия.

Пример определения

Два натуральных числа называются взаимно простыми, если они не имеют отличных от 1 общих множителей. Число p называется простым, если существует единственное его представление в виде произведения двух натуральных чисел: его произведение на 1. Натуральное число, не являющееся простым, называется составным.

Например, числа 7 и 22 являются взаимно простыми; 7 – простое число, число 22 не является простым, так как имеет место произведение $22 = 2 \cdot 11$.

Из приведённого определения выпадает число 1. Его не принято относить ни к простым, ни к составным числам.

Математические утверждения, справедливость которых принимается на веру, называются **аксиомами** (постулатами), а высказывания, справедливость которых доказывается, называются **теоремами**. Часто, если для доказательства теоремы её утверждение разбивают на ряд мелких утверждений, последние называются **леммами**.

Пример аксиомы евклидовой геометрии

Через две точки можно провести единственную прямую.

Пример теоремы

Целое число делится на 6 без остатка, если оно чётное, а сумма цифр, с помощью которых записано это число, делится на 3.

Доказательство этой теоремы можно получить, доказав три леммы:

Лемма 1. Целое число n делится на число m без остатка, если число n делится без остатка на числа p и q, где $p \cdot q = m$.

Лемма 2. Чётное число (число, заканчивающееся на 0, 2, 4, 6, 8) делится на 2 без остатка.

Лемма 3. Целое число делится на 3 без остатка, если сумма цифр, с помощью которых записано это число, делится на 3 без остатка.

4. Для того чтобы лучше понимать друг друга, короче и яснее излагать свои мысли, математики используют общепринятую систему знаков и обозначений. К примеру, запись 1, 2, 3 означает простое перечисление чисел, а $\{1, 2, 3\}$ – множество, элементами которого являются числа 1, 2, 3.

Пусть A – множество, тогда запись $a \in A$ означает, что а является элементом множества A, а запись $B \subset A$ означает, что B является подмножеством A. Для того чтобы записать противоположное утверждение, нужно перечеркнуть символ или поставить черточку над символом: $a \notin A$ или $a \,\overline{\in}\, A$.

Очень часто используются знаки:

$\Rightarrow$ импликация (из … следует…);
$\Leftrightarrow$ эквивалентность (две импликации);
$\forall$ квантор всеобщности;
$\exists$ квантор существования.

Примеры использования этих знаков:

$x \geqslant 5 \Rightarrow x^2 \geqslant 25$;
$2x + 1 = 3 \Leftrightarrow x = 1$;
$\forall x \in R\ \exists n \in N : x > 1/n$.

В последней строчке записано утверждение: для любого действительного числа x существует натуральное число n, такое, что x больше $1/n$.

Общие понятия в математике

1. Натуральные числа

1. Определение. Числа 1, 2, 3..., употребляемые при счёте, называются натуральными. Множество натуральных чисел обозначается символом N.

Для записи натуральных чисел мы используем позиционную десятеричную систему, называемую арабской. В ней используются десять значков, которые называются цифрами: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0; весомость каждой цифры определяется местом. Если читать (как это принято у арабос) запись натурального числа справа налево, то первая цифра означает число единиц, вторая – десятков, третья – сотен и т. д.

Например: $29872 = 2 + 7 \cdot 10 + 8 \cdot 100 + 9 \cdot 1000 + 2 \cdot 10000$.

В случаях, когда для условной записи арабских чисел используются буквы, этот факт выделяется чертой сверху: $\overline{abcd}$.

Задача 1. Выставляя на информационном щите цену доллара, выраженную двузначным числом, работник обменного пункта 30 октября 2001 года перепутал карточки и поставил цену, превышающую истинную на 36 сомов. Сколько стоил доллар, если использовались две карточки, на каждой из которых была написана цифра, являющаяся степенью двойки?

Решение. Обозначим искомое число $\overline{xy}$.
Тогда имеет место равенство $\overline{yx} = \overline{xy} + 36$.
Распишем это уравнение:
$10y + x = 10x + y + 36$ – и получим: $y - x = 4$.
Так как по условию цифры x и y могут быть равны 1, 2, 4 и 8, то $y - x = 8 - 4$.
Отсюда имеем ответ: $x = 4$, $y = 8$; искомое число – это 48.

Задача 2. Фирма, единица продукции которой стоит 11 сомов, обещает приз каждому, кто предъявит чек с группой цифр 3781, расположенных рядом, в указанном порядке. Сколько единиц продукции достаточно купить, чтобы получить приз?

Для того чтобы получить приз, можно сделать покупку на сумму, в написании которой будет использована группа цифр 3781. Так как единица продукции стоит 11 сомов, нам нужно найти наименьшее число, кратное 11. Это число будет легко найдено, если воспользоваться признаком делимости на 11.

Обычно признаки делимости приводятся без упоминания о том, откуда они взялись – без доказательств. Восполним этот пробел. (Решение задачи 2 будет приведено после перечисления признаков делимости.)

При доказательствах будет использоваться следующий факт:

> Теорема 1. Число $n = pm + s$ делится на p, если s делится на p. ($n, p, m, s \in N$)

Признаки делимости. Пусть $n = \overline{a_l a_{l-1} \ldots a_2 a_1 a_0}$, где a_i – цифры, $\forall i = 0, 1, 2 \ldots l$. Тогда число n делится на:

1) число 2, если на 2 делится число a_0;

2) число 5, если на 5 делится число a_0.

Доказательство этих утверждений вытекает из теоремы 1 и равенств

$$n = \overline{a_l a_{l-1} \ldots a_2 a_1 a_0} = \overline{a_l a_{l-1} \ldots a_2 a_1} \cdot 10 + \overline{a_0} = \overline{a_l a_{l-1} \ldots a_2 a_1} \cdot 2 \cdot 5 + \overline{a_0}.$$

3) число 2^k, если на 2^k делится число $\overline{a_{k-l} \ldots a_2 a_1 a_0}$;

4) число 5^k, если на 5^k делится число $\overline{a_{k-l} \ldots a_2 a_1 a_0}$.

Доказательство утверждений 3), 4) вытекает из теоремы 1 и равенств

$$n = \overline{a_l a_{l-1} \ldots a_2 a_1 a_0} = \overline{a_l \ldots a_k} \cdot 10^k + \overline{a_{k-l} \ldots a_0} = \overline{a_l \ldots a_k} \cdot 2^k \cdot 5^k + \overline{a_{k-l} \ldots a_0}.$$

5) число 3 (9), если на 3 (9) делится сумма всех цифр, с помощью которых записано исходное число.

Доказательство:

$$\overline{a_l} \cdot 10^l + \overline{a_{l-1}} \cdot 10^{l-1} + \overline{\ldots} + \overline{a_2} \cdot 10^2 + \overline{a_1} \cdot 10 + \overline{a_0} =$$

$$= \overline{a_l}(99\ldots9 + 1) + \overline{a_{l-1}}(9\ldots9 + 1) + \overline{\ldots} + \overline{a_2}(99 + 1) + \overline{a_1}(9 + 1) + \overline{a_0} =$$

$$= [\overline{a_l} \cdot 11\ldots1 + \overline{a_{l-1}} \cdot 1\ldots1 + \overline{\ldots} + \overline{a_2} \cdot 11 + \overline{a_1}] \cdot 9 +$$

$$+ [\overline{a_l} + \overline{a_{l-1}} + \overline{\ldots} + \overline{a_2} + \overline{a_1} + \overline{a_0}].$$

6) число 11, если на 11 делится разность между суммами цифр, стоящих на чётных и нечётных местах в записи исходного числа.

Доказательство:

$$\overline{\ldots} + \overline{a_4} \cdot 10000 + \overline{a_3} \cdot 1000 + \overline{a_2} \cdot 100 + \overline{a_1} \cdot 10 + \overline{a_0} =$$

$\overline{\ldots} + \overline{a_4}(9999 + 1) + \overline{a_3}(1001 - 1) + \overline{a_2}(99 + 1) + \overline{a_1}(11 - 1) + \overline{a_0} =$

$\overline{\ldots} + \overline{a_4} \cdot 9999 + \overline{a_3} \cdot 1001 + \overline{a_2} \cdot 99 + \overline{a_1} \cdot 11 +$

$+ (\overline{\ldots} + \overline{a_4} + \overline{a_2} + \overline{a_0}) - (\overline{\ldots} + \overline{a_3} + \overline{a_1}).$

Осталось заметить, что числа 99, 1001, 9999, 100001 и так далее делятся на 11.

Сформулированный признак делимости на 11 и соображения, изложенные выше, позволяют переформулировать задачу 2 в следующем виде:

Найти наименьшее натуральное число вида $\overline{A3781}$ или $\overline{3781B}$, которое делится на 11.

Решение. Число $\overline{A3781}$ делится на 11, если разность $(A + 7 + 1) - (3 + 8)$ кратна 11. Следовательно: $A = 3$.

Число $\overline{3781B}$ делится на 11, если разность $(7 + 1) - (3 + 8 + B)$ кратна 11. Следовательно: $B = 8$.

В результате имеем два числа: 33781 и 37818.

Итак, для того чтобы получить приз, достаточно купить 3071 единиц продукции фирмы, затратив на это 33781 сом.

Задача 3. Найти наименьшее натуральное число вида $\overline{723X42Y}$, которое делится на 9.

Решение. Сумма цифр этого числа равна

$7 + 2 + 3 + X + 4 + 3 + Y = 19 + X + Y.$

Для того чтобы число делилось на 9, сумма его цифр должна быть кратной 9. Наименьшее значение $X + Y$, при котором число $19 + X + Y$ делится на 9, равно 8. Так как мы ищем наименьшее число, то необходимо взять $X = 0$, $Y = 8$.

Ответ: искомое число – это 7230438.

Задача 4. Среди дедушкиных бумаг был обнаружен счёт:

72 индюшки –67,9– долларов.

Первая и последняя цифры числа, которое, очевидно, представляло собой общую цену этих птиц, заменены здесь на тире, поскольку они стёрлись и стали неразборчивыми.

Каковы две стёршиеся цифры и сколько стоила одна индюшка?

Решение. Для того чтобы найти стоимость одной индюшки, мы должны разделить общую цену этих птиц на 72 – количество индюшек. Следовательно, общая цена этих птиц есть число, которое делится на 72, и, следовательно, на 8 и на 9. В соответствии с признаком делимости на 2^k, число 79 должно делиться на 8. Поэтому на месте последнего тире должна стоять цифра 2. Далее, в соответствии с признаком делимости на 9, сумма цифр числа 6792 должна делиться на 9. Отсюда следует, что на месте первого тире может стоять только цифра 3. Как результат, общая цена этих птиц равна 367,92 доллара, а стоимость одной индюшки была: 367,92 : 72 = 5,11 доллара.

Упражнения

1. Сформулируйте и докажите признак делимости на 4, 16, 25.
2. Найдите наибольшее натуральное число вида $\overline{423X6Y}$, которое делится на 5.
3. Найдите натуральное число вида $\overline{723243Y}$, которое делится на 11.
4. Найдите: a) наименьшее; b) наибольшее натуральное число вида $\overline{98723X45Y}$, которое делится на 11.
5. Произведение цифр искомого двузначного числа больше их суммы в два раза. Если в искомом числе поменять цифры местами, то получится число, меньшее искомого на 27. Найдите это число.
6. Отчитываясь за покупку стульев, Киса Воробьянинов предъявил чек, на котором остались только три последние цифры – 975 –, на месте остальных стояла большая клякса. Он сообщил, что за каждый стул было заплачено по 125 рублей. Прав ли был Остап Бендер, наказав Кису?
7. Фирма, единица продукции которой стоит 11 сомов, обещает приз каждому, кто предъявит чек с группой цифр 4915, расположенных рядом в указанном порядке. Сколько единиц продукции достаточно купить, чтобы получить приз?
8. Решите задачу 7, заменив 4915 на 83762.
9. Знайка купил 33 тетради, 12 ручек и несколько книг. Каждая книга стоила 45 сомов. Когда продавец предложил заплатить за покупки 213 сомов и 99 тыйынов, Знайка попросил его пересчитать, заявив, что имеет место ошибка. Как объяснил свою просьбу Знайка? Услышав объяснение, стоявший рядом Незнайка сказал, что о наличии ошибки можно было догадаться проще. Всего тетрадей и ручек куплено 45 штук. Каждая книга стоит 45 сомов. Поэтому стоимость покупки должна быть числом, кратным 45, в частности, заканчиваться на 5. Прав ли Незнайка?

Теорема 2. Множество натуральных чисел бесконечно.

Доказательство. Если множество натуральных чисел имеет конечное число элементов, то имеется наибольшее натуральное число M. Рассмотрим число $M + 1$. Оно также натурально и больше, чем M. Полученное противоречие доказывает теорему.

Мы использовали метод доказательства от противного.

С натуральными числами связано много красивых утверждений. Одно из них имеет прямое отношение к суммированию членов арифметической прогрессии.

Согласно одному из математических преданий, однажды, в силу некоторых причин, учитель математики не имел желания вести урок. И чтобы занять семилетних учеников, он предложил им просуммировать все натуральные числа от 1 до 100. Но не успел он устроиться за своим столом для отдыха, один из его учеников сообщил, что он выполнил задание. Говорят, что этим учеником был Карл Фридрих Гаусс – позднее вошедший в историю как один из величайших математиков. Маленький Гаусс заметил, что в последовательности 1, 2, 3, 4… 98, 99, 100, сумма чисел 1 и 100; 2 и 99; 3 и 98 и так далее. Таких сумм всего 50. Поэтому, сумма членов последовательности равна $50 \cdot 101 = 5050$.

В силу тех же соображений сумма чисел 1, 2… n равна $(1 + n)n/2$.

Отсюда следует, что можно сразу получить, что сумма $(n + 1)$ членов арифметической последовательности a, $a + d$, $a + 2d$, …, $a + (n - 1)d$, $a + nd$ равна $(n + 1)\, a + d(1+ n)n\,/2$.

Другое красивое утверждение, называется великой теоремой Ферма. По сей день теорема не имеет полного, удовлетворительного доказательства.

Звучит она так:

> Уравнение $x^n + y^n = z^n$ не имеет решения в натуральных числах для всех натуральных чисел $n > 2$.

Для $n = 2$ существует множество решений этого уравнения. Например, $x = 3$, $y = 4$, $z = 5$ или $x = 5$, $y = 12$, $z = 13$. Теорема утверждает, что ни одной такой тройки не существует для $n > 2$. Простота формулировки задачи и большой денежный приз за её решение привлекли множество людей. Ведь для того чтобы получить приз, достаточно предъявить три числа, которые удовлетворяют уравнению, и тем самым показать, что теорема неверна. В начале 20 века математические журналы были завалены письмами, в которых, якобы, излагалось решение задачи. В связи с этим ряд журналов опубликовал объявления, извещающие о том, что они не принимают доказательства великой теоремы Ферма. Это, а затем и великая инфляция, которая обесценила приз, он был в немецких марках, свели количество писем к нулю.

Вы ещё имеете шанс остаться в истории, решив эту задачу!

2. Числовые множества

1. Множество чисел, употребляемых при счёте 1, 2..., называется натуральным и обозначается N.

Множество N замкнуто относительно операций сложения и умножения. Другими словами, сумма и произведение двух натуральных чисел есть натуральное число.

2. Операция вычитания выводит из N. Числа, которые можно выразить в виде разности натуральных чисел, образуют множество целых чисел Z. Символически это записывается так: $m \in Z \Leftrightarrow m = n - k$, где $n \in N$, $k \in N$. Здесь использованы значки «$\in$» – принадлежит или является элементом, «$\Leftrightarrow$» – эквивалентно. Соответственно, «$\notin$» или «$\overline{\in}$» – не принадлежит, «$A \Rightarrow B$» означает, что B следует из A.

Множество целых чисел состоит из натуральных чисел, нуля и отрицательных целых чисел.

3. Введя операцию деления, мы получим множество рациональных чисел Q: $Q = \{p/q : p \in Z,\ q \in N\}$.

Множество Q замкнуто относительно всех арифметических операций: сложения, умножения, вычитания и деления, кроме деления на нуль. Такие множества в математике называются полями.

Числа вида p/q называются простыми дробями. Как известно, для того чтобы сложить или вычесть простые дроби, необходимо привести их к общему знаменателю, что нередко влечёт за собой громоздкие вычисления.

Пример 1

$$8\frac{18487}{125000} - 3\frac{17}{320} = 5 + \frac{18487 \cdot 32 - 17 \cdot 12500}{12500 \cdot 32} = \ldots .$$

Поэтому в математике широко используются десятичные дроби, знаменатель которых является степенью десяти.

Чтобы перевести простую дробь в десятичную, необходимо числитель простой дроби разделить на знаменатель:

$8\frac{18487}{125000} = 8{,}147896$; $3\frac{17}{320} = 3{,}053125$.

Тогда $8\frac{18487}{125000} - 3\frac{17}{320} = 5{,}094771$.

При преобразовании простых дробей в десятичные могут получаться как конечные, так и бесконечные десятичные дроби.

Итак, 23/5 = 4,6; 4/7 = 0,(571428). Последнее выражение называется периодической десятичной дробью, а количество цифр, входящих в повторяющую группу, называется длиной периода. Здесь длина равна 6.

Теорема. Любая простая дробь может быть представлена десятичной периодической дробью. Верно и обратное утверждение.

Доказательство. При делении числителя числа p/q на знаменатель в остатке могут появиться только q чисел: от 0 до $q - 1$. Если появится нуль, то получится конечная десятичная дробь. В этих случаях всегда в период можно поставить нуль: 4,6 = 4,6(0). Если же при вычислении дробной части в остатке повторится одно из чисел, от 1 до $q - 1$, а это обязательно произойдёт, начиная с этого момента, будет повторяться период. Следовательно, длина периода меньше или равна $q - 1$.

Докажем обратное утверждение. Приравниваем дробь к x. Умножив обе части этого равенства на 10^k (k – длина периода), получим второе уравнение. Вычтем из него первое и найдём x в виде простой дроби.

Пример 2

a) $0,(31) = x$, $31,(31) = 100x$, $31 = 99x$, $x = \frac{31}{99}$.

b) $2,4(173) = x$, $2417,3(173) = 1000x$, $2414,9 = 999x$, $x = \frac{24149}{9990}$.

Теорема позволяет дать другое, эквивалентное исходному, определение множества рациональных чисел: множество чисел, которое можно записать с помощью периодических дробей, называется множеством рациональных чисел.

4. Наряду с периодическими десятичными дробями, существуют и непериодические. Например: 1,011011101111...

Числа, задаваемые такими дробями, логично называть нерациональными или иррациональными (на латинском языке предлог «не» звучит как «ир»).

Итак, множество чисел, задаваемых непериодическими десятичными дробями, называется множеством иррациональных чисел и обозначается J.

Иррациональные числа естественным образом появляются в процессе развития математики. В качестве примера приведём следующую задачу.

Пример 3

Доказать, что число $\sqrt{2}$, являющееся длиной гипотенузы прямоугольного треугольника с катетами длины 1, иррационально.

Доказательство проведём методом от противного.

Предположим, что $\sqrt{2}$ рационально. Тогда существуют взаимно простые числа p и q, такие, что $\sqrt{2} = p/q$, $p \in Z$, $q \in N$. Возведя в квадрат, получим: $p^2 = 2q^2$. Следовательно, p^2 – чётно. Так как только квадрат чётного числа чётен, p – чётно, т. е. $p = 2p_1$, $p \in Z$. Тогда $4p_1^2 = 2q^2$, или $2p_1^2 = q^2$. Повторив рассуждение, получим, что q – чётно. В итоге p и q имеют общий множитель 2, что противоречит исходному предложению.

5. Множество рациональных и иррациональных чисел называется множеством вещественных (действительных) чисел и обозначается R.

6. Операция извлечения корня приводит не только к иррациональным, но и к комплексным числам. Часто имеет место неточное утверждение: корень из отрицательного числа не существует. Правильным является следующее: вещественный корень из отрицательного вещественного числа не существует.

Определение. Комплексным числом называется выражение $a + ib$, где a, $b \in R$, $i = \sqrt{-1}$ называется мнимой единицей, a – вещественной, b – мнимой частью комплексного числа.

Пусть $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$.

Тогда

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2),\ z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2),$$

$$z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + ib_1 a_2 + a_1 ib_2 + i^2 b_1 b_2 =$$

$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2).$$

Если $z = a + ib$, число $a - ib$ называется сопряжённым к z и обозначается $\bar{z}$.

Для того чтобы разделить комплексное число z_1 на z_2, достаточно умножить числитель и знаменатель числа z_1/z_2 на число, сопряжённое к знаменателю.

Пример 4

$(7 - 2i)/(3 + 4i) = [((7 - 2i)/(3 - 4i))]/[(7 - 2i)/(3 - 4i)] =$
$= (13 - 34i)/25 = 13/25 - 34i/25.$

Используя комплексные числа, получим утверждения о корнях алгебраического уравнения второй степени $x^2 + px + q = 0$:

a) уравнение всегда имеет два корня;

b) если в уравнении, где p и q вещественны, имеется корень $a + ib$, имеется и корень $a - ib$.

Доказательство первого утверждения следует из формулы для корней уравнения:

$$x_1 = -p/2 - \sqrt{(p^2/4) - q}\,,\ x_2 = -p/2 + \sqrt{(p^2/4) - q}\,.$$

Второе утверждение следует из теоремы Виета:

равенство $(-p) = x_1 + x_2$ показывает, что мнимые части могут отличаться только знаком, а равенство $x_1x_2 = q$ влечёт равенство вещественных частей.

Пример 5

$$x^2 - 2x + 5 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-5} \Rightarrow x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{-1} \cdot \sqrt{4} \Rightarrow x_{1,2} = 1 \pm i2.$$

Пример 6

Решим уравнение $x^4 - 3x^2 + 4 = 0$.

Это биквадратное уравнение, которое заменой $y = x^2$ сводится к квадратному уравнению $y^2 - 3y + 4 = 0$.

Его корни

$$y_{1,2} = 1{,}5 \pm \sqrt{2{,}25 - 4} = 1{,}5 \pm \sqrt{-1{,}75} = 1{,}5 \pm i\sqrt{1{,}75}\,.$$

Следовательно, корни исходного уравнения можно получить, решив уравнения $x^2 = 1{,}5 + i\sqrt{1{,}75}$ и $x^2 = 1{,}5 - i\sqrt{1{,}75}$.

Для этого обозначим корень $a + ib$ и воспользуемся определением: два комплексных числа равны, если равны их действительные и мнимые части.

Отсюда следует, что решение первого уравнения можно найти из равенства

$$a + ib = \sqrt{1{,}5 + i\sqrt{1{,}75}}\,.$$

Возведём обе части в квадрат $a^2 - b^2 + 2iab = 1{,}5 + i\sqrt{1{,}75}$ и приравняем действительные и мнимые части:

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 1{,}5 \\ 2ab = \sqrt{1{,}75} \end{cases}$$

Выразив a из второго уравнения системы ($a = \sqrt{1{,}75}/2b$) и подставив в первое, получим уравнение $0{,}4375 - b^4 = 1{,}5b^2$.

Его корни $b^2 = -0{,}75 \pm \sqrt{0{,}5625 + 0{,}4375}$. Так как число b должно быть действительным, b^2 не может быть отрицательным, то есть отрицательный корень является посторонним. Тогда $b^2 = 0{,}25$.

Отсюда получим решения уравнения $x^2 = 1{,}5 + i\sqrt{1{,}75}$:

$z_1 = \sqrt{1{,}75} + 0{,}5i$ и $z_2 = -\sqrt{1{,}75} - 0{,}5i$.

Оставшиеся два корня исходного уравнения – корни уравнения $x^2 = 1{,}5 - i\sqrt{1{,}75}$ – находятся так же:

$z_3 = -\sqrt{1{,}75} + 0{,}5i$ и $z_4 = -\sqrt{1{,}75} - 0{,}5i$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Пойа Дж., Килпатрик Ж. Конкурсные задачи по математике Стэнфордского университета. – М.: Микротех, 1994. – 64 с.
2. Фаддев Д. К., Соминский И. С. Сборник задач по высшей математике. – М.: Наука, 1968. – 304 с.

Интернет-источники

1. Бескин Л. Н. Стереометрия: Пособие для учителей средней школы. – Изд. 2-е, дополненное. – М.: Просвещение, 1971. – 410 с. [Электронный ресурс]. URL: https: (djvu/rar, 18,92 Мб) letitbit.net || depositfiles.com || ifolder.ru

2. Блох А. Я., Гусев В. А., Дорофеев Г. В. и др. / Сост. В. И. Мишин. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика: Учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по физ.-мат. спец. М.: Просвещение, 1987. – 416 с., илл. [Электронный ресурс]. URL: https: (djvu/rar, 9,13 Мб) letitbit.net || depositfiles.com || ifolder.ru (pdf/rar, 20,04 Мб) ifolder.ru || mediafire

3. Великина П. Я. Сборник задач по геометрии для 6–8 классов: Пособие для учителей. – Изд. 2-е, переработ, и доп. – М.: Просвещение, 1971. – 207 с., илл. [Электронный ресурс]. URL: https: (djvu/rar, 10,4 Мб) letitbit.net || depositfiles.com || ifolder.ru

4. Волковский Д. Л. Методика арифметики в начальной школе: Пособие для учителей. – Изд. 3-е. – Государственное учебно-педагогическое издательство, 1937. [Электронный ресурс]. URL: https: (djvu, 6,54 Мб) mediafire.com || rghost.ru

5. Денищева Л. О., Кузнецова Л. В., Лурье И. А. и др. Зачёты в системе дифференцированного обучения математике. – М.: Просвещение, 1993. – 192 с., илл. (Б-ка учителя математики) [Электронный ресурс]. URL: https: (djvu/rar, 7,61 Мб) letitbit.net || depositfiles.com || ifolder.ru

6. Егерев В. К. и др. Методика построения графиков функций. Учебн. пособие для студентов вузов. – Изд. 2-е. – М.: Высшая школа, 1970. – 152 с., илл. [Электронный ресурс]. URL: https: (djvu/rar, 2,7 Мб) depositfiles || rghost.ru || letitbit.net

7. Кавун И. Н., Попова Н. С. Методика преподавания арифметики. Для учителей начальной школы и студентов педтехникумов. – М.: Государственное учебно-педагогическое издательство, 1934. – 419 с. [Электронный ресурс]. URL: https: (djvu, 8,43 Мб) ifolder.ru || rghost.ru

8. Каплан Б. С., Рузин Н. К., Столяр А. А. Методы обучения математике: Некоторые вопросы теории и практики. / Б. С. Каплан, Н. К. Рузин, А. А. Столяр / Под ред. А. А. Столяра. – Минск: Нар. асвета, 1981. – 191 с., илл. [Электронный ресурс]. URL: https: (djvu/rar, 6,08 Мб) letitfile.com || depositfiles.com || ifolder.ru

9. Колягин Ю. М., Луканкин Г. Л., Мокрушин Е. Л. и др. Методика преподавания математики в средней школе. Частные методики: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов. – М.: Просвещение, 1977. – 480 с. [Электронный ресурс]. URL: https: (djvu/rar, 31,55 Мб) depositfiles.com || ifolder.ru || letitbit.net

10. Колягин Ю. М. Задачи в обучении математике. Часть I. Математические задачи как средство обучения и развития учащихся. – М., Просвещение, 1977. – 113 с. [Электронный ресурс]. URL: https: (djvu/rar, 3,94 Мб) ifolder.ru || mediafire

11. Колягин Ю. М. Задачи в обучении математике. Часть II. Обучение математике через задачи и обучение решению задач. – М., Просвещение, 1977. – 145 с. [Электронный ресурс]. URL: https: (djvu/rar, 3,94 Мб) ifolder.ru || mediafire

12. Колягин Ю. М., Оганесян В. А., Саннинский В. Я., Луканин Г. Л. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика. Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. институтов. – М.: Просвещение, 1975. – 462 с. [Электронный ресурс]. URL: https: (djvu/rar, 23,54 Мб) ifolder.ru || mediafire

13. Леонтьева М. Р., Суворова С. Б. Упражнения в обучении алгебре: Кн. для учителя. – М.: Просвещение, 1985. – 128 с. [Электронный ресурс]. URL: https: (djvu/rar, 6,55 Мб) letitbit.net || depositfiles.com || ifolder.ru

14. Леонтьева М. Р. Самостоятельные работы на уроках алгебры. Пособие для учителей. [Электронный ресурс]. URL: https: (djvu/rar, 4,87 Мб) depositfiles.com || ifolder.ru || letitbit.net || letitfile.com

15. Ляпин С. Е. (ред.) Методика преподавания математики в 8-летней школе. – М.: Просвещение, 1965. – 745 с. [Электронный ресурс]. URL: https: (djvu/rar, 6,56 Мб) ifolder.ru || mediafire

16. Лященко Е. И. Изучение функций в курсе математики восьмилетней школы. – Минск: Нар. асвета, 1970. – 176 с. [Электронный ресурс]. URL: https: (djvu/rar, 7 Мб) depositfiles.com || ifolder.ru || letitbit.net

17. Мацкин М. С. и Мацкина Р. Ю. Функции и пределы. Производная: Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1968. – 182 с., илл. [Электронный ресурс]. URL: https: (djvu/rar, 6,91 Мб) letitbit.net || depositfiles.com || ifolder.ru

18. Перова М. Н. Методика преподавания математики в специальной (коррекционной) школе VIII вида: Учеб. для студ. дефект. фак. педвузов. – 4-е изд., перераб. – М.: Гуманит. изд. центр ВЛАДОС, 2001. – 408 с., илл. Учебник состоит из двух разделов: 1. Общие вопросы методики обучения математике в школе VIII вида (для детей с нарушением интеллекта). 2. Частные вопросы методики обучения математике в школе VIII вида. [Электронный ресурс]. URL: https: (doc/rar, 2,22 Мб) ifolder.ru || mediafire

19. Репьев В. В. Методика преподавания алгебры в восьмилетней школе: Пособие для учителей. – М.: Просвещение, 1967. – 276 с., илл. [Электронный ресурс]. URL: https: (djvu/rar, 6,80 Мб) letitbit.net || depositfiles.com || ifolder.ru

20. Симонов Р. А. Математическая мысль Древней Руси. – М.: Наука, 1977. – 121 с. [Электронный ресурс]. URL: https: (djvu/rar, 7,55 Мб) depositfiles.com || ifolder.ru || letitbit.net

21. Столяр А. А. Педагогика математики. – Минск: Вышейшая школа, 1986. – 414 с. [Электронный ресурс]. URL: https: (pdf/rar, 17,66 Мб) ifolder.ru || mediafire

22. Столяр А. А. Логические проблемы преподавания математики: Учебное пособие для педагогических вузов. – Минск: Высшая школа, 1965. – 255 с. [Электронный ресурс]. URL: https: (djvu, 2,63 Мб) || rutracker

23. Столяр А. А. Методы обучения математике. – Минск: Высшая школа, 1966. – 191 с. [Электронный ресурс]. URL: https: (pdf/rar, 9,45 Мб) ifolder.ru || mediafire

24. Эрдниев П. М., Эрдниев Б. П. Укрупнение дидактических единиц в обучении математике: Кн. для учителя. – М.: Просвещение, 1986. – 255 с., илл. [Электронный ресурс]. URL: https: (djvu/rar, 6,96 Мб) letitbit.net || depositfiles.com || ifolder.ru

См. также:

Электронные версии школьных учебников/задачников/дидактических материалов (часть 1)

Электронные версии школьных учебников/задачников/дидактических материалов (часть 2)

Электронные версии школьных учебников/задачников/дидактических материалов (часть 3)

Электронные версии школьных учебников/задачников/дидактических материалов (часть 4)

Работы кыргызских авторов можно скачать с сайта: lib.kg

СОДЕРЖАНИЕ

Кыдыралиев Сыргак Капарович
Урдалетова Анаркуль Бурганаковна
Дайырбекова Гульнара Мелисовна
Лисовская Галина Анатольевна

Математика
6 класс

Методическое пособие

Для учителей школ с русским языком обучения

Редактор *В. А. Грибинюк*
Корректор *А. А. Локтионова*
Компьютерная вёрстка *С. Ю. Дранников*

Подписано в печать 07.08.2018 г.
Печать офсетная. Бумага офсетная.
Формат $60 \times 84\ ^1/_{16}$. Гарнитура Arial. Объём 7,5 п. л.
Тираж 1900 экз. Заказ № 219.

Издательская подготовка осуществлена
ОсОО «Издательство Аркус»
720016, Кыргызская Республика,
г. Бишкек, ул. Самойленко, 7 В

ARCUS
PUBLISHING